Digitized by Google

FONDO PIZZOFALCONE

23-F-30

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio XXIX

Palchetto 76

Num.° d'ordine 19

12041

23 F 30

NAZIONALE
B. Prov.
11
848
NAPOLI
R. BIBLIOTECA
VITT. EM. III

B-Rol
II
845

Digitized by Google

E

Digitized by Google

CORSO
DI
GEOMETRIA
ELEMENTARE, E SUBLIME

Ad uso della Pubblica Istruzione del Regno,
e della Reale Accademia di Marina.

DIVISO IN QUATTRO VOLUMI.

VOLUME IV°.

Che contiene la Trigonometria Rettilinea e Sferica.

C10027

ELEMENTI

DI

TRIGONOMETRIA

RETTILINEA, E SFERICA

DI V. FLAUTI

Professore di Analisi Sublime nella Regia Università degli Studj di Napoli, Bibliotecario della Società Reale Borbonica, Socio e Segretario per le Matematiche della Reale Accademia delle Scienze di Napoli, dell' Istituto d' Incoraggiamento, Membro Onorario della Società Reale di Copenaghen, e di altre Accademie, ec.

OTTAVA EDIZIONE

IN NAPOLI

Nella Stamperia al Palazzo Cariati num. 30.

1821.

AVVERTIMENTO.

DELL'

EDITORE.

Gli Elementi di Trigonometria, che or si pubblicano per l'ottava volta sono divisi, del pari che nelle due precedenti edizioni in sei Libri, l'oggetto de' quali vien descritto dall'Autore in fine del seguente *Saggio di Storia Trigonometrica*, che perciò noi ci asterremo qui dal farne parola.

Crediamo intanto indispensabile di avvertire, come nelle precedenti edizioni anche abbiamo fatto, che coloro i quali dovranno far uso di questo libro per la prima istituzione della gioventù nelle Matematiche, se mai gli parrà che i loro allievi sieno troppo gravati, potranno senza tema di guastar la catena delle nozioni elementari di Trigonometria, e senza lasciargli incompleti nell'apprendimento di questa

Scienza, tralasciare non solo i due ultimi Libri per intero; ma anche il terzo e quarto Capitolo del Lib. II., e 'l settimo ed ottavo del IV. Come al contrario gli esortiamo a volersi impegnare di far bene intendere a' giovani tutto ciò ch' è compreso nel resto della presente Istituzione.

SAGGIO
DI
STORIA TRIGONOMETRICA.

Siquidem in omni scientiarum genere, nosse quibus gradatim incrementis adoleverint jucundissimum est, et ad rerum ipsarum intelligentiam plurimum confert.
Horsley *in Comm. in Arith. New.*

Prime ricerche trigonometriche presso i Greci.

I primi germi delle funzioni circolari apparvero da che il divino Archimede (1) intraprese a rettificare la circonferenza; poichè da questa ricerca egli si vide passar mano mano dal raggio del cerchio alla determinazione delle corde rappresentanti i lati di quella serie di poligoni regolari successivamente inscritti in esso, crescenti sempre in ragion doppia rispetto al numero de' lati, cominciando dall' esagono; ed egli dovè inoltre

(1) Circa 250 anni prima dell' Era volgare.

procedere ancora alla determinazione delle saette, ed apotemi, o coseni della metà degli archi medesimi. Inoltre trovasi anche da lui determinata la tangente dell' arco di 30°.

Dopo Archimede, Ipparco (2) ristauratore dell' Astronomia presso i Greci si occupò pure della determinazione delle corde degli archi circolari, e trattò quest' argomento in dodici Libri, come cel rapporta Teone nel suo Comento all' Almagesto di Tolomeo; questo lavoro d'Ipparco, per quanto lice congetturarne, doveva essere un compiuto Trattato di Trigonometria per que' tempi.

Seguentemente Menelao, ne' principj del secondo secolo dell' Era volgare, compose sei libri intorno allo stesso argomento. Ma nè meno quest' opera di Menelao, nella quale par che dovessero contenersi non solamente i principj per la determinazione delle corde, ma anche le Tavole di queste è a noi pervenuta. Scrisse anche questo Geometra tre libri *degli Sferici*, che Maurolico fece il primo conoscere, traducendoli dall' Arabo in Latino, e pubblicandoli nel 1558 (3); ma essi non sono già, come credè il Signor Hutton, un Trattato di Trigonometria Sferica, avendo per oggetto la teorica de' triangoli sferici, intorno a' quali contengono molti teoremi curiosi, e poco conosciuti.

---

(2) Circa 150 anni prima dell' Era volgare.

(3) Regiomontano prima del Maurolico gli aveva anche tradotti, ma questa sua opera, insieme con altre traduzioni, che fece de' libri di Matematici Greci, conservasi tuttora manoscritta nella Biblioteca di Norinberga.

Poco dopo di Menelao, o pure contemporaneamente, Tolomeo (4) occupatosi dell'Astronomia e della Geografia, dovè necessariamente entrare a trattar di proposito di ricerche Trigonometriche; e la sua opera, ch'è la sola che siaci pervenuta da' Geometri Greci, intorno a questo argomento, può farci conoscere fin dove questa scienza fosse giunta a quel tempo, sia che Tolomeo non abbia fatto altro che raccogliere le cose, ch' egli espone, da' Geometri suoi predecessori, sia che le abbia in gran parte egli stesso inventate.

In tali ricerche egli suppone diviso il raggio del cerchio in 60 parti uguali, di una delle quali si vale poi per unità nel determinare le corde degli archi procedenti per uguali differenze. La Tavola degli archi, e delle corde, ch' egli riporta nel I°. Libro del suo Almagesto contiene tre colonne. Nella prima di esse sono registrati gli archi di 30 in 30 minuti; nella seconda le rispettive corde espresse in parti sessagesime del raggio, co'loro minuti e secondi; e nella terza finalmente le differenze delle corde corrispondenti ad un minuto degli archi, o la 30ma parte delle differenze tra le corde registrate nella seconda colonna. Egli espone anche in questo luogo il metodo da lui tenuto per la construzione di questo canone di corde, fondato sul celebre Teorema da lui dimostrato pel quadrilatero inscritto nel cerchio, cioè che: *Il rettangolo delle diagonali pareggia la somma dei due rettangoli ciascuno contenuto da'lati*

---

(4) Questo Matematico antico non fu già nativo di Pelusio, come si è da tutti creduto, ma di Tolemaide in Egitto (*Vegg. il Montucla*).

opposti (5); il qual Teorema tra poco vedremo campeggiare nella nostra construzione del Canone Trigonometrico. Ed è da credere che non avrebbe quel Geometra sicuramente mancato di compiere sì utile computamento delle corde suddette da lui cominciato, se la Geometria fin da que' tempi fosse stata adorna di simboli algebrici in convenevol modo.

Trigonometria presso gli Arabi.

Il Canone Trigonometrico espresso per le corde degli archi, continuò ad essere in uso fino a circa il nono secolo, alla quale epoca gli Arabi cominciarono a sostituirvi quello de' seni, che a vero dire, è più spedito del precedente. Dobbiamo inoltre ad essi una maggiore applicazione di questa scienza ad alcuni importanti Teoremi, de' quali anche adesso ci valghiamo con qualche vantaggio nella construzione del Canone.

Trigonometria presso gli Europei.

Gli Europei appresero la Trigonometria dagli Arabi, ma è incerta l'epoca in cui ciò avvenne, e chi fu il primo ad apprenderla da essi; nè la Storia delle Matematiche ci presenta cosa che possa esser per noi di qualche importanza intorno agli avanzamenti della Trigonometria presso costoro, fino al principio del XV° Secolo,

---

(5) La dimostrazione di questo Teorema è stata da noi recata in fine del Libro VI. degli Elementi di Euclide (*Vegg. il vol.* I. *del presente Corso*).

nel quale Giorgio di Purbach (6) arricchì la Trigonometria e l'Astronomia di nuovi Teoremi, Tavole, ed osservazioni. Egli fu il primo, che per construire con più approssimazione la Tavola de' seni, immaginò di estendere la divisione del raggio, praticata, come si disse la prima volta da Tolomeo, fino a 600000 parti uguali, e computò poi con tal divisione gli archi circolari da 10 in 10 minuti. E forse la Trigonometra non pochi altri vantaggi avrebbe tratti dall' ingegno, e da' travagli di questo valentissimo Astronomo, se la morte non lo avesse immaturamente rapito alle Matematiche in età di 39. anni.

Le sue tracce però furono ripigliate dal suo allievo Giovanni Muller (7), conosciuto volgarmente col nome di Regiomontano, dalla città di Konigsberg (*Mons Regius*) in cui nacque.

Da principio il Regiomontano ritenne la stessa divisione de'seni di minuto in minuto; poi, esaminate meglio le cose, conobbe ch' era più vantaggioso di dividere il raggio decimalmente, e lo suppose perciò di 1000000 parti. Al canone de' seni e coseni, il solo che si fosse conosciuto ed usato fino a lui, aggiunse quello delle tangenti, che chiamò *Foecundus*; ma non vide poi l' uso vantaggioso, che poteva farsene nella Trigonometria. Egli rinvenne inoltre molti nuovi principj per la risoluzione de' triangoli, per mezzo de'quali la Trigonometria Rettilinea arrivò fin d' allora, per questa par-

(6) Così chiamato, perchè nativo di Purbach, tra l' Austria e la Baviera, nacque nel 1423.

(7) Nato nel 1436.

te, a quella stessa perfezione in cui presentemente si trova.

Il quinto ed ultimo Libro del suo Trattato *de Triangulis planis et sphaericis* (8), che si ragguarda alle Trigonometrie, contiene varj Problemi speciosi della risoluzione di quelle figure, alcuni de' quali si trovano recati nel Capitolo ultimo del Libro II. della nostra Trigonometria. Ed è da notare che nel numero di essi ve n'ha di quelli, per la risoluzione de' quali era bisogno di quelle supposizioni indeterminate di quantità, che annunziano la conoscenza dell' Algebra; e che per un di essi, il 12 del lib. II., giunto ch' egli è all'equazione, si arresta dicendo: *quod restat, praecepta artis edocebunt*; ed il Montucla nel far ciò notare dice, che: » potrebbesi da questa circostanza inferire, che l'Alge» bra fosse stata conosciuta in Europa prima di Luca di » Burgo (soggiungasi e di Lionardo Pisano) se per » avventura non si volesse supporre, che le soluzioni di » siffatti Problemi, contenuti in quel Lib. V° della sud» detta opera del Regiomontano, fossero state aggiunte » dalle Schoner, che ne fu l'editore, quasi un secolo » dopo la morte dell' autore (9).

Ma il Montucla avendo seguentemente convenuto, che il trasporto dell' Algebra in Italia, per opera di Lionardo Pisano, abbia avuto luogo non già, come prima equivocò, nel XV°; ma bensì molto prima nel XIII° secolo (10), cioè quasi due secoli prima che vi-

(8) Un tal trattato fu dall' autore scritto circa l' anno 1464, e pubblicato in foglio a Norimberga nel 1513.

(9) Montucla-*Histoire des Mathèmatiques*.

(10) Addizioni in fine del Volum. 1. dell' opera poc' anzi citata.

vesse il Regiomontano, ci libera dall' entrare in qualunque esame a questo proposito. Sicchè al Regiomontano non dovrà farsi il torto, come taluno ha opinato, di non riconoscerlo per autore di quelle soluzioni, ed a noi altri Italiani non dovrà togliersi il vanto di aver fatta conoscere in Europa una tale scienza, che fummo i primi a coltivare, e che abbiamo poi grandemente contribuito ad accrescere e migliorare.

La perfezione alla quale Regiomontano aveva portata la Trigonometria e il Canone Naturale fece sì, che quasi contemporaneamente con lui molti ad un tratto cominciarono a trattar con successo le stesse ricerche, aggiugnendo ad esse, e perfezionandole sempre più. In fatti abbiamo, che a quell' epoca Giovanni Verner compose anch' egli cinque libri su i Triangoli, e 'l famoso Astronomo Copernico trattò pure la Trigonometria sì Piana, che Sferica, costruendo il canone de' seni colle differenze per ogni 10 minuti del quadrante, e per un raggio diviso in 100000 parti uguali; ed Erasmo Reinhold costruì e pubblicò le Tavole delle Tangenti, che chiamò, come il Regiomontano, *Canon foecundus*.

A quest' epoca stessa fioriva nelle nostre Regioni un uomo insigne nelle Matematiche, delle quali non lasciò parte che non coltivasse. Francesco Maurolico (11); e non potè essere a meno che quest' uomo agitato dalla voglia di distinguersi tra' suoi contemporanei, in mezzo a tante ricerche Trigonometriche che trattavansi allora, principalmente in Germania, non vi volesse anch' egli la sua parte. Frutto di queste sue fatiche fu l' introduzione

(11) Nato in Messina nel 1494.

delle seganti nel calcolo Trigonometrico, e nella risoluzione de' Triangoli, e l'istituzione della Tavola di esse, che chiamò *Benefica*; e che da lui fu calcolata di grado in grado, e di minuto in minuto (12). In tal modo dunque il Canone naturale Trigonometrico prese tutta quella perfezione, che conserva anche al presente.

Falsa è poi interamente l'opinione del Lansbergio, che questo Canone delle seganti si appartenesse al Retico, le di cui Tavole furono pubblicate dopo la morte dell'autore dal suo Allievo Valentino Othone nel 1594, col titolo di *Opus Palatinum*, cioè almeno 36 anni dopo ch'erano comparse in pubblico quelle del Maurolico, che furono pubblicate nel 1558, e prima di quest'epoca da lui medesimo annunziate nel 1550. E la stessa perfezione maggiore delle Tavole del Retico, in paragone di quelle del Maurolico, avendole il Retico costruite supponendo il raggio diviso in 1000000000000000 parti, e di 10 in 10 secondi, annunzia chiaramente, che questo fu posteriore al Maurolico in tal ricerca, e che non potendo prevalergli nell'invenzione, si sforzò sopravanzarlo in perfezione (13). Dopo il già detto del

(12) Veg. a tal proposito il Lib. II°. *Sphaer. Maur.* p. 60.

(13) Il dotto Astronomo Sig. Delambre, nella sua *Storia dell'Astronomia del Medio Evo*, tratta per verità con troppa ingiustizia il Maurolico, menomandolo di quella non comune considerazione in che l'hanno sempre tenuto i Matematici non solo contemporanei, ma anche posteriori, e delle lodi che gli sono meritamente da essi fatte. Ed ecco come si esprime il Delambre: « Ce qui a fait vivre le nom de Maurolycus, c'est qu'il passe « pour avoir le premier introduit, dans le calculs trigonometri-

Regiomontano, e del Maurolico, si rileverà chiaramente l'errore del Briggs, che attribuisce l'invenzione del Canone delle Tangenti e Seganti a Reinholds.

« ques, l'usage des sécantes, dont voici le titre en entier ». E qui egli rapporta questo titolo. Di poi dopo aver esitato a credere, nel luogo poc' anzi recato, che Maurolico fosse stato l'introduttore delle seganti nel calcolo trigonometrico, passa a dir qualche cosa delle opere di questo geometra contenute in quel Titolo, senza farne molto caso. Ma se il Signor Delambre si fosse dato il pensiero nella sua analisi critica di queste opere di Maurolico, di considerare i tempi in cui furono fatte; certamente non così felici per le Matematiche come i nostri; ma che però ci hanno prodotta tutta quella luce, che ora ci abbaglia; e se per poco avesse avuta la bontà di gettar lo sguardo sugli altri lavori geometrici del Maurolico, e principalmente per ciò che riguarda i Conici di Apollonio, in cui fece anche cambiamenti tali, che meritarono di essere adottati da varj Geometri, e specialmente dal Signor de la Hire, Francese: se in somma egli avesse voluto deferire per poco al sentimento del Viviani, geometra sommo; il quale, non ostante che Maurolico non avesse colpito nel segno nella divinazione che fece del quinto libro di Apollonio, pure stimò le geometriche speculazioni fatte dal geometra Messinese degne di lode per modo, che ne tenne conto nella Prefazione ch' egli scrisse per l'altra immortal divinazione, che diede del libro stesso del Geometra di Perga. Se a tutto ciò avesse posto mente il Delambre, non dubitiamo affatto, che sarebbe stato uniforme nella maniera di pensare col suo dottissimo compatriota, il Signor Montucla, il quale in più luoghi della sua Storia delle Matematiche, che noi preghiamo di riscontrare, parla con assai rispetto del Messinese Maurolico, chiamandolo *geometra originale--uno de' più forti geometri del suo tempo--pieno di spirito geometrico*, ec (Vegg. la storia delle Matem. Vol. I. alle pag. 563, 572 e 696.)

Il Vieta (14) ristoratore e promotore di ogni ramo di Scienze Matematiche a' suoi tempi, si occupò anch' egli della Trigonometria, e stabilì nuovi teoremi importantissimi per la costruzione del Canone, che perfezionò grandemente (15). Egli costruì pure separatamente le Tavole Trigonometriche pe' seni, e quelle per le tangenti e seganti, di minuto in minuto colle loro differenze, e col raggio 100000; e per le tangenti e seganti verso la fine del quadrante, ne estese l'approssimazione ad 8 e 9 cifre (16). È singolare anche, e degna di essere avvertita la disposizione ch' egli il primo diede a queste Tavole, aumentandole da parte di man sinistra fino a

---

(14) Nato nel 1540 a Fontenai nel Basso Poitou, Provincia della Francia.

(15) Veggansi le sue opere pubblicate da Francesco Schooten nel 1616, e specialmente il trattato *de Sectionibus Angularibus*.

(16) Queste Tavole furono dall' autore pubblicate in Parigi nel 1579, col titolo di: *Canon Mathematicus seu ad triangula, cum appendicibus*. È ad esse aggiunta dall' autore medesimo una seconda parte con l'epigrafe: *Universalium inspectionum ad Canonem Mathematicum liber singularis*, in cui contiensi la costruzione delle tavole esposte nella prima parte, un compendio di Trigonometria Piana, e Sferica, con applicazione di esso, e molte altre ricerche intorno alla quadratura del cerchio, alla duplicazione del cubo, *ec.* Un tal libro però ebbe la disgrazia di uscire in luce carico di errori tipografici, lo che al Vieta essendo dispiaciuto, ne ritirò tutte le copie che potè riavere, sperando di poterne fare una nuova edizione corretta, come egli stesso il promise, allorchè parlando della presente sua opera si espresse: *Sed qui anno 1579 fuit editus infeliciter Canon meus Mathematicus, is cura secunda recognitus*

45°, e ritornando poi indietro verso destra, per disopra, fino a 90°; sicchè in tal modo ciascun arco, e 'l suo complemento trovansi nella stessa linea, e così le loro linee trigonometriche rispettive. E tal disposizione comodissima è anche al presente ritenuta nelle Tavole Trigonometriche. Il Vieta serbò anche pel canone delle Tangenti la denominazione di *Foecundus*, datoli dal Regiomontano, e chiamò *Foecundissimus* l'altro delle seganti.

Serva ciò che si è detto del Vieta di limite a quanto si era fatto per completare il Canone naturale e la Trigonometria; mentre tutto ciò che produssero su questo argomento in seguito e il Retico, e l'Othone, e il Pitisco, e 'l Lansbergio ed altri, non sono che semplici miglioramenti e riproduzioni delle cose precedentemente fatte; e ciò a fin di giungere celeremente ad una delle epoche più interessanti per la Trigonometria, nella quale questa scienza prese un aspetto tutto nuovo, che ancora conserva, e conserverà sempre.

In tanta copia di ricerche Trigonometriche fatte in Germania, in Italia, ed in Francia, l'Inghilterra sola non sembrava di esservisi interessata grandemente. Questa Nazione però, presso la quale le Matematiche sono state sempre coltivate con impegno, e successo, si serbava ad una scoperta importante e grandissima, cioè

---

majorem fortassis, apud eos (Canonistas) obtinebit auctoritatem (Opera Math. pag. 327.). Ma tal seconda edizione non avendo però avuto mai luogo, l'opera è divenuta di una rarità estrema. (*Vegg. il Montucla vol.* 1. *pag.* 610.)

all' invenzione de' Logaritmi, ed alla costruzione del canone artificiale.

Giovanni Nepero Barone Scozzese (17), uomo dotato di un intelletto penetrante, spaventato dalle immense moltiplicazioni e divisioni che facevano di bisogno, volendo far uso delle Tavole Trigonometriche fino allora costruite, si diede ad escogitare qualche mezzo onde facilitare queste operazioni ne' grandi numeri; ed egli ritrovò a tal proposito un metodo, che espose in un opera da lui pubblicata nel 1617, col titolo di *Rabdologia*, o sia *numeratio per virgulas* (18). Egli però non fu interamente pago di questa sua invenzione; e perciò si diede ad escogitar nuovi mezzi, e più efficaci per riuscir nell' intento, e pervenne così alla meravigliosa invenzione de' logaritmi, ch' egli pubblicò colle stampe nella sua: *Logarithmorum Canonis Descriptio; seu Arithmeticarum supputationum mirabilis abbreviatio ec. Edimbourg* 1614. E siccome il suo principale interesse in questa invenzione era stato la facilitazione de' calcoli Trigonometrici; così egli non applicò i logaritmi che a' seni, costruendo effettivamente le Tavole logaritmiche di tutt' i seni degli archi di un quadrante di minuto in minuto. Egli non diede in questa prima opera il suo metodo per la construzione delle Ta-

(17) Nato circa la metà del secolo XVI°

(18). Il metodo della *prostaferesi*, che non molto prima avevano i Trigonometri ritrovato, per evitare in qualche modo le moltiplicazioni di quantità trigonometriche, quantunque ingegnoso, era nondimeno imbarazzante, e non era nè attivo, nè universale.

vole logaritmiche, ma promise di darlo, ed avrebbe certamente tenuto parola, se la morte non avesse rapito quest' uomo infinitamente utile alle Matematiche nel 1618. Il suo figlio però, Roberto Nepero, non mancò di pubblicare nell' anno stesso l' opera alla quale stava il padre travagliando, col titolo di *Mirifici logarithmorum Canonis constructio*, *ec.*

Non è questo il luogo di discorrere più a lungo su i logaritmi di Nepero; ma non sarà poi inutile di far avvertire, che la Tavola ch' egli diede de' logaritmi de' seni differiva dalle nostre ordinarie Tavole in ciò, che il logaritmo del raggio è in quella effettivamente *zero*, donde avviene, che i logaritmi Neperiani de' seni vanno crescendo al minorarsi di questi. Nè poi siffatti logaritmi sono costruiti per la base 10, come per le ordinarie Tavole; sistema ch' egli stesso seguentemente immaginò, e che, come deducesi dall' epigrafe della summentovata opera, il figlio annunziò al pubblico dopo la morte del padre. Ma sia, per questo luogo, abbastanza detto dell' invenzion di Nepero intorno a' logaritmi. Egli però, se tanto giovò alla Trigonometria per la computazione, non tralasciò dall' altra parte di occuparsi de' principj per la risoluzione de' triangoli, principalmente per la Trigonometria Sferica, per la quale ridusse tutta la risoluzione de' triangoli rettangoli a due regole fondamentali, o piuttosto ad una sola divisa in due parti facilissime ad apprendersi ed a ritenersi. Ed il Montucla con ragione si duole della poca avvertenza, che da' Trigonometri del Continente si era posta in farle ben ravvisare. Oltre a ciò egli diede anche alcune regole utilissime per la pratica risoluzione de' Triangoli sferici obbliquangoli, le quali oggigiorno, mercè i multiplici

usi della Trigonomatria Sferica, non si veggono più trascurate ne' Corsi Elementari di questa scienza. Finalmente stabilì e dimostrò pe' triangoli sferici diversi teoremi nuovi, che costituiscono una notabile armonia tra le due Trigonometrie.

Dopo il Nepero, com'era naturale, i Trigonometri si volsero immantinente alla costruzione delle Tavole de' logaritmi de' numeri, e delle linee trigonometriche, alle quali si diede il nome di *Canone Artificiale*: ma non è del nostro scopo l'occuparci di queste cose; sicchè passeremo sotto silenzio le fatiche illustri di tanti sommi uomini intorno a questo soggetto.

La Trigonometria parve dopo tutti questi travagli di sommi uomini già giunta al suo grado massimo di perfezione, e di fatti nulla mancava nè per le regole atte a risolvere i diversi casi de' triangoli sì rettilinei che sferici, nè per la comoda computazione di tali regole in pratica. La Trigonometria Sferica però non presentava lo stesso grado di perfezione che la Rettilinea, nè nell'applicazione delle regole, nè nel calcolo de' triangoli; e l'uso della perpendicolare in risolvere i triangoli sferici obbliquangoli produceva in taluni casi tale sconcio, che aveva indotto in equivoco anche abili Trigonometri, ed assai pratici in questo genere di computi, come il La Caille (19). Inoltre le regole Neperiane, principalmente pe' triangoli obbliquangoli trovavansi sbandite da tutte le istituzioni di Trigonometria Sferica, e molto male a proposito. Finalmente non si era stato

(19) Vegg. il Cagnoli (*Trigon pag.* 327 *ediz* 2.)

alcuno, il quale avesse ravvisata la mirabile corrispondenza tra un triangolo sferico, ed un angolo solido compreso da tre angoli piani, e che avesse dedotta dalla natura di questi i principj per la risoluzione di quelli. Mancava inoltre alla Trigonometria Sferica una forma analitica tale, che si comprendessero in una formola generale tutt' i casi diversi della risoluzione de' triangoli sferici sì rettangoli che obbliquangoli; e dobbiamo a Leonardo Eulero tutti questi vantaggi procurati alla Trigonometria Sferica, ch' egli espose in una Memoria inserita nel Vol. III. P. I. degli Atti nuovi di Pietroburgo, per l' anno 1779, coll' epigrafe: *Trigonometria Sphaerica universa, ex primis principiis breviter et dilucide derivata.*

Dopo l'Eulero non ha potuto essere a meno, che tutti coloro i quali hanno trattato lo stesso argomento non siensi valuti degli artifizj da lui usati; e bisogna anche convenire che, grazie alle fatiche di questo sommo Analista, la Trigonometria Sferica è stata dopo lui, da tutti quelli che l' hanno esposta seguendo il suo metodo, assai ben tratta. Ma lungo sarebbe il trattenersi anche per poco intorno ai diversi Elementi di Trigonometria composti dai moderni.

Non deesi però tralasciare di far quì parola di un eccellente e completo Trattato sulla Trigonometria, dell' egregio Matematico Antonio Cagnoli, da pochi anni tolto alle Matematiche, ed al decoro Italico. Egli ha compreso in questo libro pubblicato da lui due volte in Italiano, e ciascuna volta tradotto nell' idioma Francese, con moltissimo ordine e chiarezza, tutto quanto mai poteva conoscersi intorno alla Trigonometria, corredando le teoriche da lui esposte con opportuni esempj

di Problemi che elegantemente risolve. Tutte le formole delle due Trigonometrie vi sono trattate, e per maggior comodo di coloro che debbono valersene, esse trovansi espresse in tavole da potersi consultare all' uopo. A tutte queste cose egli ha aggiunte le analogie differenziali de' triangoli sì rettilinei che sferici, trattando quest' argomento in maniera affatto nuova.

Nè quì tacerò anche il completissimo Trattato di Trigonometria e Poligonometria del mio egregio amico il Signor Professore Franchini di Lucca, Matematico che co' suoi ottimi studj ed assidue fatiche onora la nostra Italia e la scienza che tanto ama e coltiva.

Or fino a questo punto con tanti progressi che le due Trigonometrie avevano fatto, nessuno aveva ravvisato che i moderni Teoremi delle funzioni circolari, come anche il problema della multisezione angolare, e l' altro analogo dell' inscrizione di un poligono regolare nel cerchio, e la serie del seno e coseno dell' arco, potevano dedursi come immediate conseguenze da un Teorema, che pei principj della costruzione del canone avava stabilito il primo Trigonometra Tolomeo. E ciò essendo venuto in mente al nostro valentissimo Matematico Sig. Fergola, egli distese su questo proposito due Memorie, che trovansi inserite nel Vol. I. degli Atti della nostra Accademia delle Scienze; ed io estraendo da tali Memorie quella parte che alle mie ricerche elementari si conveniva, me ne sono valuto in questo mio libro, nel quale sarà vantaggioso il vedere uniformemente dimostrati, coll'ajuto di quel Teorema Tolemaico, i diversi Teoremi del Vieta sulle corde degli archi circolari, e la formola del seno e coseno della somma e differenza di due archi dati, come pure quelle altre che da esse dipendono.

Ma ecco di questa mia opera il Prospetto. Io l'ho divisa in sei Libri, e ne' primi quattro, che sono gli essenziali per l'insegnamento, ho esposto, nel I° la costruzione dal Canone, o che si voglia essa ottenere per le vie che somministra il calcolo aritmetico applicato a' principj di Geometria, come il facevano gli antichi; o che si voglia ottenere per elementari formole algebriche. Ho tralasciato le formole trigonometriche trascendenti, nè ho additata la maniera speditissima di poter ottenere tal costruzione di Canone per queste vie; perchè qui non si tratta di vedere come si possa costruire il Canone suddetto, ma solamente come il costruirono, trovandosi le Tavole de' seni già belle e formate. D'altronde siccome l'uso grandissimo di queste formole trascendenti ha luogo nell'Analisi degl' Infiniti, esse debbono entrare a far parte di questa, o servire ad essa d'Introduzione; che perciò saranno esposte nel luogo che sarà loro convenevole.

Nel II°. Libro ho trattato della Trigonometria Rettilinea, esponendo i principj per la risoluzione de' Triangoli, non solamente negli ordinarj casi, cioè in quelli risultanti dalla combinazione delle sei parti di essi, tre a tre, fuorchè tre angoli; ma anche in alcuni altri casi, ne' quali o queste parti sono diversamente combinate; o pure sono implicitamente contenute in alcune altre forme di dati dalle quali bisogna derivarnele per la determinazione del quesito. Ed in ciò fare mi sono uniformato a quello che aveva praticato Regiomontano, che come già si disse aveva trattate quistioni di questa natura nel V°. Libro della sua opera *de triangulis*; ed a molti Trigonometri moderni che lo avevano imita-

to. Ho cercato pure che le risoluzioni di tali Problemi fossero eleganti il più che fosse possibile.

Nel III° Libro ho esposto la natura e le proprietà de' Triangoli sferici, dottrina indipensabile a premettersi agli Elementi di Trigonometria Sferica, molto più che essa in alcun altro luogo del nostro Corso non vien trattata. Ed a questo proposito ho cercato di correggere le ordinarie dimostrazioni, che trovansi presso taluni autori, sull' eguaglianza de' lati e degli angoli rispettivi de' triangoli sferici in alcuni casi, le quali mi sono sembrate vacillanti.

Il IV° Libro espone i principj per la risoluzione de' Triangoli sferici, secondo Eulero, ed i medesimi dopo essere stati ritrovati e dimostrati in forma algebrica, si veggono poi ridotti in logaritmiche espressioni comodissime per l' effettiva calcolazione de' triangoli sferici obbliquangoli; il che dà luogo alle regole del Nepero, di cui si è già di sopra accennata qualche cosa. E nell' esporre le regole per la risoluzione de' triangoli sferici si è avuto riguardo a dar sempre quella tra le varie formole che poteano adoprasi per un dato caso, che fosse la più comoda e conducente, e per la facilità, e per l' esattezza; lo che si era anche praticato pe' triangoli rettilinei. Ed a questo proposito diremo di passaggio, che non bene fanno coloro, i quali, principalmente in libri elementari, abbondano in formole ed in regole di risolvimento pe' triangoli per uno stesso caso: ciò non solamente produce confusione nell' animo de' giovani, e per mancanza di quel giusto discernimento che si conviene nel far uso di esse, gliele fa alla rinfusa adoperare, e senza metodo; ma talvolta anche gli annoja, e ne devia l' attenzione. D' altronde è si facil

cosa il presentar le formole trigonometriche sotto diverso aspetto, che potrebbe questo loro cambiamento di vesti moltiplicarsi continuamente; ed allora di questa scienza limitata a pochi principj, se ne formerebbe una scienza estesa oltremodo ed implicata. I Professori però, per esercizio di scuola, faranno bene ad occupare i loro allievi in queste trasformazioni facilissime di formole trigonometriche, poichè in tal modo oltre ad avvezzarli a vederle sotto diversi aspetti, ond' è che non si confonderanno trovandole diverse in altri autori in cui potranno incontrarle; servirà ciò anche loro di esercizio algebrico, e come una manuduzione a quelle moltiplici trasformazioni, che saranno poi essi obbligati a fare nelle formole algebriche studiando il calcolo sublime, e la meccanica. Le ricerche su i casi dubbj nella risoluzione de' triangoli sferici, è necessaria cosa che non si tralascino nel trattar gli Elementi di Trigonometria: nell' esporle però ho cercato di farlo colla maggior chiarezza e brevità che mi è stato possibile, e senza entrare in tanti inutili particolari.

Ho aggiunto questa volta al presente libro due Capitoli, uno intorno alla perpendicolare ne' triangoli sferici, e l' altro per la determinazione dell' aja di cui si ha talvolta bisogno; nè questa l'ho determinata che nel solo caso de' tre angoli dati, o de' tre lati, per le ragioni che si potranno vedere nel Capitolo ove ne tratto.

Nel V° e VI° Libro della Trigonometria, che sono destinati *ad abundantiorem scientiam*, e che possono aversi come un' utile istruzione ed esercizio per coloro che studiano l' applicazione dell' analisi alla Geometria, ho trattato dell' uso vantaggioso delle formole Trigonometriche nel risolvimento di quei Problemi ove di

quesito si vuole in valore, e ne' quali fra' dati sono alcune quantità angolari; e del vantaggio che può talvolta ottenersi dalle formole trigonometriche, acciocchè si pervenga facilmente ad una pura equazione algebrica, e quindi capace di una geometrica composizione. Ed era sommamente necessario, che io qui trattassi e l'uno l'altro di questi argomenti, ora principalmente che in tutti i libri di Geometria analitica si fa sfoggio grandissimo di formole trigonometriche pel rinvenimento dell' equazione ad un problema geometrico, che analiticamente si risolva, senza fare alcuna distinzione tra quesito in valore, e quesito geometricamente construibile. Ed a questo proposito avvertirò di passaggio, pel secondo de' sopraddetti argomenti, che allorquando parlo dell'uso delle formole trigonometriche pel rinvenimento di una equazione algebrica, o riducibile a tale per mezzo di qualche trasformazione, in cui si passi da formole trigonometriche a rapporto tra linee rette, intendo già che questa trasformazione sia di per se chiara, e facile ad ottenersi; poichè altrimenti niun vantaggio avremmo per la sua soluzione, essendosi obbligato a tante diverse costruzioni particolari complicate, dalle quali poi inelegantissima e priva di uso diverrebbe la composizione geometrica del Problema. Siccome i Problemi che io reco per lo stabilimento del metodo onde far uso delle formole trigonometriche nel risolverli, non hanno altro oggetto che questo, così ho tralasciato di maneggiare l'equazione ad essi, allorchè vi son pervenuto. E prevengo intorno a ciò il Pubblico, per non incorrere nella taccia dovuta a coloro che costumano al presente di creder risoluto il Problema, allorchè lo hanno messo in equa-

zione, talvolta d'inconstruibil forma; o pure di aver tracciate le vie per pervenirvi.

Tra i Problemi che ho recato nell' ultimo Libro si troverà quello della trisezione angolare, che per la sua importanza, e pel nesso strettissimo che ha colla Trigonometria meritava di avervi luogo. In fine di tutto questo, non ho voluto tralasciare taluno avvertimento che conveniva fare in qualche luogo del mio Trattato, ma che non stava a proposito nel luogo stesso, o di mostrar talvolta qualche difetto o qualche cosa notabile in altri libri di Trigonometria facili a pervenire in mano de' giovani, e che meritano di essere ad essi raccomandati; ed ho perciò aggiunte in fine del medesimo alcune Note, che riescirà utile a' giovani il consultare.

Digitized by Google

ELEMENTI

DI

TRIGONOMETRIA

LIBRO I.

DELLE QUANTITA' CIRCOLARI, E DEL LORO CALCOLO.

CAPITOLO I.

DELLA DIVISIONE DELLA CIRCONFERENZA, E DELLA MISURA DEGLI ANGOLI.

1. La necessità di misurare le figure diede luogo allo stabilimento di alcune regole, dalle quali surse poi una scienza sulla natura e sul rapporto delle grandezze figurate, che chiamossi Geometria. Ma non sempre gli elementi donde questa misura si derivava erano tali che si potevano valutare con moduli meccanicamente eseguiti, come avviene quando per avere la base e l' altezza di un parallelogrammo, o di un triangolo ci serviamo del palmo, del piede, o di altra misura lineare. In fatti era chiaro dalla Geometria, non solamente esser valutabile l'aja di un triangolo, dati i valori della sua base ed altezza; ma anche quando fosse dato il rettangolo de' suoi lati, e l'angolo da questi compreso (*).

(*) Imperocchè in questo caso, come si rileverà facilmente dal Lib. II di questi Elementi, il *rettangolo dato de' lati sta all' aja del triangolo come il raggio al seno del dato angolo.*

Nel primo caso però la valutazione del triangolo era manifesta, e poteva ottenersi con misure lineari; e nel secondo vi doveva entrare a calcolo il valor dato di quell'angolo; al che fare non valendo le semplici nozioni di Geometria, bisognò perciò ricorrere ad altri espedienti, e da ciò derivò la Trigonometria generalmente presa, della quale designeremo specialmente la natura e la divisione in appresso. Sicchè una tale Scienza, anche senza aver riguardo a' bisogni dell' Astronomia, e delle operazioni geodesiche, delle quali cose senza dubbio dovettesi far uso fin da' primi tempi della Geometria, può essa considerarsi come di origine puramente geometrica dipendente dalla valutazione delle figure in que' casi ne' quali tra gli elementi della loro esibizione vi entravano angoli.

Adunque il fondamento di questa scienza è la misura degli angoli; e questa fu facile a rilevarla dagli Elementi stessi di Geometria. Un teorema recato da Euclide, in fine del VI° Libro de' suoi Elementi stabilisce un rapporto tra gli angoli posti al centro di un cerchio e gli archi che gli sottendono, dond' è che facilmente si rileva, che questi crescendo in proporzione di quelli, potevansene comodamente prender per misura. E di tal genere di misure *vicarie* altre se n'erano già adottate pe' diversi usi della vita.

2. Dato questo primo passo conveniva dar poi l' altro di ridurre la circonferenza a quantità discreta, fissando per essa un'unità; si scelse perciò avvedutamente la 360ma parte di quella, che chiamossi *grado*. Avvedutamente, ho detto, per la ragione, che potendosi adottare un qualunque altro numero per esprimere la circonferenza, si prescelse quello, che in un ristretto periodo di cifre conteneva il più di divisori esatti, di modo tale, che si poteva ottenere espresso per un intero la metà, la terza, la quarta, la quinta, la sesta, l' ottava, la nona, la decima, la duodecima, la quindicesima, e fin la diciottesima parte della circonferenza; il che molto era importante per la *costruzione del*

(*) Vi è chi ha congetturato che la divisione della circonferenza in 360 parti sia derivata dall' essersi diviso il raggio ch' è uguale alla sottesa del-

canone, cioè per la fissazione de' valori delle linee rette trigonometriche, come tra poco vedremo (*).

3. Suddivisero inoltre ogni grado in 60 parti, a ciascuna delle quali diedero il nome di *minuto primo*; perchè chiamarono *secondi* quelle altre 60 parti in cui supposero diviso ogni minuto primo, e così supposero diviso il minuto secondo in 60 *terzi*, ed ulteriormente. La ragione per la quale adottarono di preferenza agli altri questo numero 60 fu la stessa della poc'anzi assegnata per la divisione della circonferenza.

4. Ad indicare i gradi, i minuti primi, i secondi, *ec.* sogliono i Trigonometri servisi del 0°, ′, ″, *ec.* nel modo seguente, così per esprimere un arco o un angolo di 55 gradi, 23 minuti primi, e 44 secondi, scrivono 55° 23′ 44″.

5. Questa comodissima ripartizione della circonferenza ha avuto luogo, con pieno effetto per gli usi a cui era destinata, da' tempi più remoti della Trigonometria fino a noi, ed ha ancor luogo: se non che è da notare, che il Keill nell'Introduzione alla sua Trigonometria di passaggio disse, che taluni, indicando così il Vieta ed altri, avrebbero voluto che il grado si fosse diviso in parti centesime piuttosto che sessagesime, ed aggiugendovi per parte sua, che forse sarebbe stato utile di dividere il grado e la circonferenza in ragion decupla (*); ed il Trigonometri

la sesta parte della circonferenza corrispondente in 60 parti; ma allora la nostra opinione varrà a spiegare perchè siasi diviso il raggio in 60 parti piuttosto che in altro numero. Alcuni altri hanno congetturato che quella divisione della circonferenza avesse avuto luogo dall'antica composizione dell'anno in 360 giorni, donde avveniva che la circonferenza dell'eclittica restava naturalmente divisa in 360 parti uguali, ciascuna corrispondente ad un giorno. Ma una tal supposizione fa dipendere assolutamente dall'azzardo una ricerca che necessariamente doveva interessare gli usi ulteriori a' quali tal divisione della circonferenza doveva esser destinata; e poi non ispiegherebbesi il perchè siasi ogni grado suddiviso sessagesimalmente, e nel modo stesso il raggio del cerchio.

(*) *Quidam gradum in partes centesimas, potius quam sexagesimas partiri volunt: et utilius fortasse esset, non gradus, sed et ipsum circulum in decupla ratione secare, quae divisio forsan aliquando obtinebit.*

Francesi ultimamente hanno ciò mandato ad effetto*, costruendo delle Tavole in cui la circonferenza supponesi divisa in 400 gradi, e ciascun grado in 100 minuti. Noi però riterremo per la costruzione del canone, che quì appresso esporremo l'antica divisione, e sarà poi facile il ravvisare, come possa effettuarsi tal costruzione servendosi della nuova divisione. Per altro riesce lo stesso il servirsi per gli usi pratici di Trigonometria delle une, o delle altre Tavole, nè il maneggio delle une merita alcuna preferenza ogni qual volta le Tavole si abbiano già, come tante ve ne sono esattissime, belle e costruite; e può poi anche farsi uso delle tavole decimali ne' casi che gli angoli si sieno misurati in gradi per l'antica divisione, o al contrario, non essendovi bisogno che di una semplicissima riduzione.

Intanto per metter tutto il rigore geometrico che si conviene nel sistema esposto per la misura degli angoli per gli archi di cerchio, stabiliremo i due seguenti Teoremi.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

6. Tutti gli archi di cerchio descritti tra i lati di un angolo, preso per centro il suo vertice, contengono lo stesso numero di gradi e minuti.

Sia l'angolo BCR [*fig.* 1.], e tra i suoi lati sieno descritti co' raggi CB, C*b*, e col medesimo centro C gli archi circolari BR, *br*, e di più sien completati i quadranti BAC, *ba*C; starà l'angolo BCR all'angolo BCA, come l'arco BR all' altro BA [33. VI.]. E similmente l'angolo *b*C*r* sta all'altro *b*C*a*, come l'arco *br* all'arco *ba*. Ma l'angolo BCR sta all'altro BCA, come l'angolo *b*C*r* all'altro *b*C*a*: adunque sarà pure l'arco BR [illegible] arco BA, come l'arco *br* all'arco *ba*; cioè il numero de' gradi e minuti di BR starà a 90°, come il numero de' gradi e minuti di *br* a 90°. Laonde gli archi BR, *br* dovranno essere dello stesso numero di gradi e minuti. — *C.B.D.*

COROLLARIO.

7. Da ciò si vede, che qualunque sia il raggio di un cerchio, è invariabile quel numero, ch' esprime in gradi e minuti il valore di un angolo, ch' è al centro di esso.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

8. Due angoli disuguali posti a' centri di due disuguali cerchi, sono tra loro in ragion composta da quella degli archi che gli sottendono, e dall' inversa de' raggi de'cerchi.

Sieno i due angoli BCS, *b*C*r* [*fig.* 2.] posti a' centri di due cerchi, che abbiano disuguali i raggi CB, C*b*, e che si suppongano descritti dintorno al comune centro C. È manifesto che l' angolo BCS stia all' altro BCR, come l' arco BS all' arco BR. Ma è poi BS a BR in ragion composta di BS : *br*, e di *br* a BR, o sia di BS a *br*, e di C*b* a CB. Adunque starà pure l' angolo BCS all' altro BCR, cioè a *b*C*r*, in ragion composta dalla ragion degli archi BS, *br* che gli sottendono, e dalla reciproca de'raggi C*b*, CB di que'cerchi dintorno a cui centri essi sono posti. — *C.B.D*

CAPITOLO II.

Della natura delle quantità circolari, e del loro rapporto.

9. *Def.* I. *Complemento di un arco* è la differenza di esso dal quadrante.

E *Supplemento di un arco* è la differenza di esso dalla semicirconferenza.

Così l' arco di 30° tien per complemento quello di 60°; e'l complemento di 60° è l' arco di 30°.

E l' arco di 150° è il supplemento di quello di 30°.

10. *Def.* II. *Seno di un arco* è la perpendicolare, che si abbassa da un suo estremo sul raggio, che passi per l'altro estremo. Questo seno suol dirsi *seno retto*, *o seno primo*

11. *Cor.* I. Il seno d' un arco è lo stesso di quello del di lui supplemento.

12. *Cor.* 2. Prolungandosi il seno di un arco fino ad incontrare un' altra volta la circonferenza è chiaro, che si otterrà la corda dell' arco doppio del dato; che perciò si vede, che: *Il seno di un arco è la metà della corda dell' arco doppio.*

13. *Def.* III. *Tangente d' un arco* è quella retta, che il tocca in un suo estremo, e si distende insino al raggio prodottovi per l' altro estremo.

14. *Def.* IV. E tal raggio prodotto insino alla tangente di un arco, si dirà di lui *segante.*

15. *Def.* V. *Coseno di un arco* è il seno del di lui complemento. E *Cotangente* di un arco è la tangente del di lui complemento. E si dirà *Cosegante* di un arco la segante del complemento di esso.

16. *Def.* VI. *Senoverso* di un arco è quella parte del diametro intesposta tra un estremo dell' arco stesso e 'l suo seno

retto; ed esso risulta, come si vede, dal prendersi la differenza tra il raggio ed il coseno dell'arco.

Il senoverso suol chiamarsi anche *saetta*, colla qual voce il designarono i Trigonometri antichi.

17. *Scol.* Per illustrare le precedenti definizioni, ad un punto qualunque M [*fig.* 3.] del quadrante AMD si conduca il raggio CM, che si produca verso T. Ed abbassate dal detto punto le perpendicolari MP, MQ su i raggi AC, CD, si tirino agli estremi A, D del quadrante le tangenti AT, DS, che incontrino in T, S il raggio CM

Sarà MP il seno dell'arco MA, AT ne sarà la tangente, e CT la segante. Inoltre le linee rette MQ, DS, CS si diran coseno, cotangente, e cosegante del detto arco AM rispettivamente; poichè tali linee rette sono il seno, la tangente, e la segante dell'arco MD, ch'è il complemento di AM. E finalmente la PA sarà il senoverso del proposto arco AM.

18. Le quantità descritte nelle definizioni dal n° 10 fino al 16 sono quelle che si sono dette *quantità circolari*; ed esse chiamansi anche *linee rette trigonometriche*, perchè è per loro mezzo che si perviene alla risoluzione de' triangoli, oggetto della Trigonometria, come vedremo a suo luogo.

19. Le suddette linee rette trigonometriche hanno tra loro il rapporto che ora passeremo a rilevare.

Per la similitudine de' triangoli TAC, MPC sta AT ad AC, come MP a PC; cioè: *la tangente dell'arco* AM *al raggio, come il seno dello stesso arco al suo coseno.* Ed essendo parimente CT a CA, come CM a CP; starà *la segante di un arco al raggio, come il raggio al coseno.* Finalmente, per la simiglianza de' triangoli CAT, CDS, dee stare TA ad AC, come CD a DS, cioè: *il raggio dee esser medio proporzionale tra la tangente, e la cotangente di un arco.*

Ed indicando per φ un qualunque arco, e per R il raggio del cerchio cui si appartiene, della qual lettera ci serviremo sempre in appresso per di notare un raggio indeterminato di cerchio, se ne rileveranno per le sue altre linee trigonometriche espresse nel seno e coseno le seguenti equazioni, cioè

$$\text{tang. } \varphi = \frac{R.\text{sen.}\varphi}{\cos.\varphi}$$

$$\text{seg. } \varphi = \frac{R^2}{\cos.\ \varphi}$$

$$\text{cot. } \varphi = \frac{R^2}{\text{tang. } \varphi} = \frac{R.\cos.\varphi}{\text{sen. } \varphi}$$

$$\text{coseg. } \varphi = \frac{R^2}{\text{sen. } \varphi}$$

E da esse si vedrà poi essere

$$\text{tang. } \varphi : \text{cot. } \varphi :: \text{sen.}^2\ \varphi\ \cos.^2\ \varphi\ (^*).$$

Ed altri rapporti si potranno anche per esercizio rilevar facilmente tra le sopraindicate linee trigonometriche.

(*) L' espressione sen $^2\varphi$, sen.^{n} φ, ed ogni altra analoga, dinota il quadrato o la potenza n del seno dell' arco φ, o dell' altra linea trigonometrica alla quale si prefigge l' esponente. Ed esse sono equivalenti alle altre $(\text{sen. } \varphi)^2$, $(\text{sen. } \varphi)^n$, ec.

CAPITOLO III.

DE' SEGNI CHE APPARTENSONSI ALLE LINEE TRIGONOMETRICHE NE' QUATTRO DIVERSI QUADRANTI DEL CERCHIO, E DE' VALORI CH'ESSE HANNO NEGLI ESTREMI DI QUESTI.

20. Nel cerchio ADBE [*fig.* 3.] si tirino due diametri AB, DE perpendicolari tra loro, e gli archi dell'intera circonferenza s'incomincino a contare nel quadrante AD da D verso A; è chiaro, che di un qualunque arco DM minore del quadrante DA, ne sia MP o CQ il coseno, DQ il senoverso. Ciò posto la MP perpendicolare al diametro AB prolunghisi in *m*; si vedrà che l' altro arco DA*m* supplemento di DM abbia per suo coseno la *m*P, o C*q*, uguale a CQ, e per senoverso la D*q*. E perchè il coseno C*q* dee essere quanto la differenza del raggio CD e del senoverso D*q* [16.]; perciò una tal C*q* dovrà risultar negativa. Vale a dire, che: *un arco minore del quadrante, e 'l suo supplemento hanno lo stesso coseno; ma questo è positivo per lo primo, negativo per l' altro.* Si abbassi ora da *m* la *mqm'* perpendicolare alla DE, si vedrà, che l' arco DAE*m'* minore di tre quadranti, e maggiore di due abbia per suo coseno *m'p*, o sia C*q*, cioè lo stesso di quello dell' arco DA*m*, o anche quello di DM, o E*m'*, preso negativamente: cioè: *un tal arco avrà per coseno quello del suo eccesso sulla semicirconferenza, preso negativamente.*

Finalmente da *m'* tirisi al diametro AB la perpendicolare *m'p*M', sarà M'*p* il coseno dell' arco DAEEM', ed esso pareggerà QC coseno di MD, o di DM'; ossia *un arco maggiore di tre quadranti, e minore della circonferenza avrà per suo coseno quello stesso che si appartiene all' arco ch' è il compimento all' intera circonferenza.*

E dalle cose finora dette in questo numero si rileva, che:

Il coseno di un qualunque arco di un quadrante sia anche coseno del suo supplemento; lo sia inoltre della semicirconferenza accresciuta di esso; e finalmente della circonferenza minorata di esso: per lo secondo e terzo de' suddetti archi però, bisognerà prenderlo negativamente. Cioè indicando per φ quell' arco, per n il suo coseno, e per π un quadrante, sarà

$$\cos.\varphi \ldots\ldots = \cos.(4\pi - \varphi) = n$$
$$\text{e} \quad \cos.(2\pi - \varphi) = \cos.(2\pi + \varphi) = -n$$

21. Premesse le considerazioni su i coseni degli archi dell'intera circonferenza, sarà facile il passar da esse a quelle de' seni per gli stessi. S' incominciino in fatti tali archi a contare non più da D verso A, ma al contrario da A verso D; è chiaro che QC coseno dell' arco DM, e dell' altro DAEAM′, sarà seno dell' arco AM, o pure di ADM′, che sono supplementi l' uno dell' altro. Similmente Cq coseno dell' arco DAm, e dell' altro DAEm', sarà seno dell' arco ADBm', o pure dell'altro ADPEm, il primo de' quali eccede la semicirconferenza per l' arco Bm' = AM, e l' altro manca dalla circonferenza per l' arco Am uguale allo stesso AM. Adunque i due indicati archi, l' uno maggiore della semicirconferenza, e minore di tre quadranti, l'altro maggiore di tre quadranti, e minore di quattro, hanno i loro seni negativi, e ciascuno quanto quello di un arco minore del quadrante. Dalle cose finora esposte in questo numero si rileva, che: *Il seno di un arco minore del quadrante, è anche seno del suo supplemento; della semicirconferenza accresciuta di esso, e della circonferenza minorata dallo stesso: ma per questi due ultimi archi dee esser preso negativamente.* Cioè servendosi delle stesse indicazioni di poc' anzi per gli archi, ed indicando con m il seno dell'arco φ, sarà

$$\text{sen.}\varphi \ldots\ldots = \text{sen.}(2\pi - \varphi) = m$$
$$\text{sen.}(2\pi + \varphi) = \text{sen.}(4\pi - \varphi) = -m$$

22. Or siccome le altre linee trigonometriche si derivano da

queste, e dal raggio del cerchio, per mezzo delle analogie recate nel n.° 19, è perciò facile ad intendersi, che: *Le linee trigonometriche di un qualunque arco minore del quadrante debbano appartenersi anche al suo supplemento; ad un arco che risulta dall'aggiugnere al proposto la semicirconferenza; finalmente a quello, che si ottiene togliendolo dalla circonferenza.* E sarà facil cosa il vedere quali segni debbano tali linee trigonometriche avere in ciascuno di questi altri tre casi, col tenersi conto de' segni de' seni e coseni corrispondenti.

23. Adunque una volta che siensi esibite le linee trigonometriche per tutti gli archi di un quadrante, si sapranno anche quelle per tutti gli archi dell' intera circonferenza; il che è sufficientissimo per gli usi ordinarj della Trigonometria, della Geografia, e dell' Astronomia; e solamente bisognerà far attenzione al segno che convien dare ad esse. Ed è per questa ragione, che le Tavole Trigonometriche non contengono, che solamente le espressioni di tali linee per gli archi del quadrante.

24. E volendo poi estendere un poco le precedenti considerazioni, sarà facile il rilevare, che le linee trigonometriche di quegli archi, che risultano dal sommare ad una, due o più circonferenze un arco qualunque di essa, sieno le stesse di quelle di un tal arco aggiunto. Così che dinotando con π la circonferenza di un cerchio, e con φ un suo arco qualunque, sia

$$\text{sen.}\ (n\pi + \varphi) = \text{sen.}\ \varphi$$
$$\cos.\ (n\pi + \varphi) = \cos.\ \varphi$$

e similmente per le altre linee trigonometriche.

25. Finalmente convien qui far anche notare quali sieno i valori delle linee trigonometriche negli estremi de' quattro quadranti.

Dalle definizioni II. III. e IV. si ricava evidentemente, che nel punto A dal quale s' incominciano a computar gli archi della circonferenza ADBE, il qual punto viene indicato da 0°, sia *o* il seno e la tangente, e che la segante sia espressa dal raggio CA: e poichè il complemento di un arco 0° è 90°, cioè il quadrante AD, il cui seno è il raggio DC, il maggior di

tutti i seni, detto perciò *massimo*; quindi si vede, che il coseno dell' arco 0° debba essere generalmente espresso da *R*.

Inoltre dalle medesime definizioni si rileva, che il coseno del quadrante AD sia o, e che la tangente e la segante sieno infinite; poichè la AT ed il raggio CD non posson mai incontrarsi, essendo parallele. Nell' altro estremo B della semicirconferenza ADB ritorna ad esser *o* il seno, e la tangente; e il coseno dovendo esser quello stesso dell' arco 0° supplemento di 180°, preso però negativamente, sarà quindi espresso da — CB, e sia — *R*: ed anche — *R* sarà la segante, come si rileva facilmente dalla seconda analogia del n.° 19.

Alla fine de' tre quadranti, cioè nel punto E, il coseno diviene *o*, il seno è CE preso negativamente, cioè — *R*, come facilmente si vede; e la tangente e la segante si fanno di nuovo infinite, per la stessa ragione detta di sopra: il loro segno sarà però quello, che gli viene dal tener conto del segno del seno e del coseno di un tal arco. Finalmente all' estremo A di quattro quadranti, o dell' intera circonferenza ADBEA, divien nuovamente *o* il seno; ed il coseno, e la segante si fanno quanto CA, cioè *R*; e quindi la tangente è anche o.

26. Premesse le cose dette ne' due numeri precedenti, ecco per ajuto della memoria la seguente

TAVOLA

De' segni delle principali linee trigonometriche ne' quattro quadranti.

	Arco	Seno	Coseno	Tang.
	0°	+ o	+ R	+ o
Dopo . . .	0° *fino a* 90°	+	+	+
	90°	+ R	+ o	+ ∞
Dopo . .	90° *fino a* 180°	+	—	—
	180°	+ o	— R	— o
Dopo . .	180° *fino a* 270°	—	—	+
	270°	— R	— o	+ ∞
Dopo . .	270° *fino a* 360°	—	+	—
	360°	— o	+ R	— o

27. Il seno di un arco, la di lui tangente, la segante, il coseno, la contangente e la cosegante, sono le linee trigonometriche adottate da' Geometri per la risoluzione del triangolo. E le linee trigonometriche dell' arco AM appartengono eziandio all' angolo ACM, di cui quello è misura.

28. Or le suddette linee trigonometriche, non essendo in effetto grandezze geometriche, come par che indichino le definizioni quassù rapportate per esse, ma bensì numeri, possono perciò modificarsi nella seguente convenevol forma. Cioè, prendendo il raggio per l' unità delle linee trigonometriche, come costumasi di fare.

Il seno dell' arco AM è il valor numerico, che tiene la perpendicolare abbassata da un suo estremo sul raggio, che passi per l' altro: la tangente di un arco è il rapporto del seno al coseno di esso; e la segante è quanto l' unità divisa pel coseno: cioè,

$$\text{tang. } \varphi = \frac{\text{sen.}\varphi}{\cos.\varphi} \qquad \text{seg. } \varphi = \frac{1}{\cos.\varphi}$$

$$\text{cotang. } \varphi = \frac{\cos.\varphi}{\text{sen.}\varphi} \qquad \text{coseg.}\varphi = \frac{1}{\text{sen. } \varphi}$$

Dalla prima e terza delle quali equazioni si rileva, che la tangente e cotangente trigonometrica tabulare di un arco siano l' una inversa dell' altra; sicchè se il valor di una sia espresso dal numero n, quello dell' altra lo sarà da $\frac{1}{n}$

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA.

29. Le linee trigonometriche di due archi dello stesso numero di gradi e minuti, presi in cerchi diversi, sono proporzionali a' raggi de' cerchi.

Intorno al centro C [*fig.* 1.] si descrivano co' raggi CB,

C*b* i due quadranti circolari BRA, *bra*, e poi tirisi il raggio CR*r*; è manifesto che i due archi BR, *br* sottendendo lo stesso angolo in C, debbano essere dello stesso numero di gradi, e minuti [6.°]. Ciò premesso si tirino tutte le linee trigonometriche di tali archi; è chiaro che i triangoli CRN, CR*n* sono simili tra loro, che perciò le RN, *rn*, e le CN, C*n* sono proporzionali ai raggi CB, *cb*: ed essendo CB : C*b* : : CN : C*n*; sarà permutando, convertendo, e di nuovo permutando CB : C*b* : : BN : *bn*. Essendo poi simili gli altri triangoli CBD, C*bd*, sta BC : *b*C : : BD : *bd* : : CD : C*d*. Si è dunque dimostrato, che le linee trigonometriche dell'arco BR, e quelle dell' altro *br* sono proporzionali a' raggi CB, C*b*. — *C.B.D.*

Corollario.

30. Quindi quel numero, ch' esprime le linee trigonometriche in un dato cerchio, per un arco determinato, e per lo raggio diviso in un dato numero di parti, rappresenterà anche le linee trigonometriche di un arco dello stesso numero di gradi e minuti in un altro cerchio; purchè il raggio si supponga diviso similmente al primo. Ed è poi chiaro, che essendosi supposto uguale ad 1 il raggio trigonometrico delle Tavole, si avrà il valor di una linea trigonometrica per un qualsivoglia arco di cerchio il cui raggio sia dinotato dal numero R, moltiplicando per questo numero il valor trigonometrico di tal linea nelle Tavole.

CAPITOLO IV.

DEL CANONE TRIGONOMETRICO, E DELLA MANIERA DI COSTRUIRLO, SERVENDOSI DI PRINCIPJ RICAVATI DALLA GEOMETRIA ELEMENTARE.

31. DEF. VII. *Canone trigonometrico* è una tavola, ove a ciascun arco minore del quadrante, ed espresso ne' suoi gradi e minuti, ascrivonsi i valori numerici delle linee rette trigonometriche, che gli appartengono, presovi per unità il raggio. Un tal registro di linee rette trigonometriche, dicesi volgarmente *Tavola de' seni.*

32. COR. Dividendosi ogni grado in 60′, il quadrante, ch'è di 90°, sarà di 5400′. Laonde saran pure 5400 quegli archi minori del quadrante, che vadan successivamente crescendo di un minuto.

Nella tavola de' seni, il primo arco cui appongonsi le sue linee trigonometriche, è di 1°. Il secondo è di 2°; e così successivamente per 5400 termini, l' ultimo de' quali è di 90°. E per evitare i fratti nel computo di ciascuna linea trigonometrica, il raggio, ch' erasi preso per l' unità, s' intende diviso in 10000000, o più parti decimali. E ciascuna di dette linee vedrassi espressa nel solo numeratore di un fratto decimale, cui sottintendesi il denominatore 10000000, o l'altro di siffatti numeri in cui si sarà supposto diviso il raggio.

33. SCOL. Il canone trigonometrico riducesi a risolvere il seguente general problema: *Dato il rapporto numerico di un arco al quadrante, ritrovare il rapporto che serbi al raggio ciascuna linea trigonometrica di esso arco.*

La costruzione di questo canone, dagli antichi eseguivasi con operazioni aritmetiche a certe grandezze geometriche applicate; e da' moderni si suole anche da alcune analitiche espressioni rilevare. Esso suol distinguersi in *lineare*, o *naturale*; ed *artifi-*

eiale o *logaritmico*. Il lineare è il già definito. E 'l logaritmico esibisce i logaritmi volgari delle linee rette trigonometriche, come nelle comuni tavole de' seni si osserva.

LEMMA.

34. Se sono date l'espressioni numeriche di due lati di un triangolo rettangolo, sarà anche data quella del rimanente lato. E ciò sovente ottiensi per approssimazione.

Cas. 1. Supponganſi dati i valori de'cateti RN, NC [*fig.* 4.] del triangolo RNC rettangolo in N; sarà la somma de' quadrati di questi due valori, o di questi due numeri, uguale al quadrato di quel numero, che n'esprimerebbe l'ipotenusa RC. Adunque la radice quadrata della somma dell' espressioni de'due cateti NR, NC sarà l'espressione dell'ipotenusa RC. Che se la linea retta RC sia incommensurabile alle RN, NC, come il più delle volte avviene, l'anzidetta radice non potrà aversi esattamente, ma per approssimazione, e tal ne sarà il valore dell' ipotenusa RC.

Cas. 2. Se diasi in numeri l'ipotenusa CR, e 'l cateto NR, l'altro cateto NC sarà espresso dalla radice della differenza del quadrato dell'ipotenusa CR, e di quello del cateto RN. Lo che si dimostra come nel precedente caso.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

35. Il coseno di un arco è la radice della differenza del quadrato del raggio, e del quadrato del seno di esso arco.

L'arco RB [*fig.* 4.] tien per seno il valor numerico del-

la perpendicolare RN calata dal suo [illegible] sul raggio CB, che passa per l'altro estremo B [illegible] stesso arco ha per coseno il valore numerico del' [illegible] la sua uguale NC. Di più il raggio trigonometri[illegible] è posto uguale ad 1. Dunque dalle date espressioni dell' ipotenusa RC, e del cateto RN del triangolo rettangolo RNC, che sono il raggio, e 'l seno dell' arco RB, si avrà, per lo teorema precedente, il valore dell' altro cateto CN, cioè del coseno dell' arco RB; ed ei sarà la radice della differenza de' quadrati del raggio e del seno di esso arco. — *C.B.D.*

36. *Scol.* L' arco RB sia di 30°; il suo complemento RA di 60° ne sarà doppio: e la corda RA di questo, ch' è il lato dell' esagono, e perciò uguale al raggio AC, che supponesi 1., dovendo essere il doppio del seno RN dell' arco RB [12.], sarà quindi sen. $30° = 1/2$; e per conseguenza RM o NC, cioè sen.60°, o pure $\cos.30° = \sqrt{(1 - 1/2)} = 1/2 \sqrt{3}$.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

37. Se nella circonferenza di un cerchio prendansi ovunque due archi contigui ed uguali, e da un punto della medesima circonferenza cadano tre linee rette agli estremi loro; sarà la corda di uno di essi archi a quella dell' arco doppio, come la media di coteste incidenti alla somma delle incidenti estreme, o alla loro differenza, secondochè quel punto stia fuori de' due archi uguali, o si ritrovi in uno di essi.

Vale a dire, se EF, FG [*fig.* 5. *e* 6.] sieno que' due archi uguali, e dal punto A della circonferenza cadano agli estremi loro le tre linee rette AE, AF, AG, sarà

$$EF : EG :: AF : AG \pm AE.$$

Ove il segno + nell' ultimo termine vale per la *fig.* 5, e 'l — per la 6.

Cas. 1 Per lo quadrilatero AGFE [*fig.* 5.] inscritto nel proposto cerchio dee essere $AF \times EG = AG \times EF + AE \times FG$ [D.VI] $= EF(AG + AE)$, essendo $EF = FG$. Adunque sarà

$$EF : EG :: AF : AG + AE$$

Cas. 2. Similmente a cagion del quadrilatero GFAE [*fig.* 6.] inscritto nel cerchio EAGF, è pure $AG \times EF = AE \times FG + AF \times EG$; cioè $EF(AG - AE) = AF \times EG$. Adunque dovrà essere

$$EF : EG :: AF : AG - AE.$$

E perciò se nella circonferenza *ec.* — *C. B. D.*

Corollario I.

38. Per l' estremo E [*fig.* 5 *e* 6] dell' arco EF tirisi il diametro ER, e giungansi le altre due rette FI, FR (I è il centro). Saranno simili i due triangoli isosceli EGF, FRI, per avere uguali i due angoli FGE, FRE fatti in una medesima porzione di cerchio. Onde starà

$$EF : EG :: FI : FR.$$

Corollario II.

39. E paragonando quest' analogia colle ultime de' Casi 1. e 2. del proposto Teorema, si avrà anche

$$FI : FR :: AF : AG \pm AE,$$

Cioè: *L'incidente a quel punto medio dee stare alla somma o alla differenza di quelle due altre incidenti, come il raggio del cerchio alla corda del supplemento di uno di que' due archi uguali.*

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

40. Dall' estremo A [*fig.* 7.] del diametro AH del cerchio ALHF si tronchino successivamente gli uguali archi AB, BC, CD, DE, EF, FG, *ec.*, qualunque sia il numero di essi, o la grandezza di ciascheduno; e poi da quell' estremo a' punti delle divisioni B, C, D, E, F, G, *ec.* si tirino altrettante rette AB, AC, AD, AE, AF, AG, *ec.* Dico esser ciascuna di quelle corde alla somma di quelle due che le sono prossimamente vicine da una parte e dall' altra, come il raggio del detto cerchio alla corda del supplemento di uno di quegli archi uguali.

Cioè per qualunque punto F di tal divisione dee stare

$$AF : AG + AE :: BI : BH$$

Dim. Il presente teorema ritrovasi già dimostrato nel *Cor.* 1 della Proposizione precedente.

COROLLARIO.

41. Supponendo il raggio BI = 1, sarà

$$AF : AG + AE :: 1 : BH$$

e quindi

$$AF \times BH = AG + AE$$

ovvero

$$AG = AF \times BH - AE.$$

Cioè: *Ciascuna delle corde AC, AD, AE, AF, AG, ec. sarà uguale al prodotto della sua precedente per la corda supplementale BH, diminuito della corda antiprecedente.*

42. E traducendo questa enunciazione in espressione trigonometrica, col sostituire alle corde il doppio seno della metà dell'arco contermine, ed alla corda supplementale BH il doppio coseno della metà del primo arco AB, il quale dinoto ora con 2φ, e perciò con 4φ, 6φ, 8φ, *ec.* gli altri che corrispondono alle corde AD, AE *ec.*, e finalmente dividendo per 2 le equazioni risultanti; si avrà, incominciando dalla corda AC.

$$\text{sen.}2\varphi = 2.\text{sen. }\varphi \cos.\varphi$$
$$\text{sen.}3\varphi = 2.\text{sen.}2\varphi \cos.\varphi - \text{sen. }\varphi$$
$$\text{sen.}4\varphi = 2.\text{sen.}3\varphi \cos.\varphi - \text{sen. }2\varphi$$
ec.

Scolio.

43. E se dall'altro estremo H di quel diametro AH conducansi a' medesimi punti delle divisioni C, D, E, F, G, *ec.* le altre corde HC, HD, HE, HF, HG, *ec*; è chiaro, che debba anche essere

$$BI : BH :: HF : HE+HG$$

Cioè: *Il raggio del cerchio alla corda supplementale BH, come ciascuna di quelle altre corde alla somma di quelle due, che le sono prossimamente vicine da una parte e dall'altra.*

44. E supponendo anche in questo caso il raggio, cioè $BI=1$, si troverà, come nel *Cor.* al n°. 41, che: *Ciascuna di queste corde supplementali, è quanto il prodotto di quella BH nella sua precedente, diminuito della corda antecedente.* Cioè, dando a quelle corde i valori trigonometrici che ad esse corrispondono in doppj coseni delle metà degli archi computati da A, agli estremi de' quali sono esse rispettivamente tirate, e poi dividendo per 2 le equazioni risultanti, sarà per le corde HC, HD, HE, *ec.*

$$\cos.2\varphi = 2.\cos.^2\varphi - 1$$
$$\cos.3\varphi = 2.\cos.2\varphi \cos.\varphi - \cos.\varphi$$
$$\cos.4\varphi = 2.\cos.3\varphi \cos.\varphi - \cos.2\varphi$$
ec.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA.

45. Il seno della somma di due archi è quanto la somma de'due prodotti, che si hanno moltiplicando vicendevolmente il seno dell' uno per lo coseno dell'altro, posto il raggio uguale ad 1.

E il seno della differenza di essi archi è quanto la differenza di que' prodotti stessi.

Sieno dinotati da φ e θ gli archi proposti, de' quali φ sia il maggiore, e ciascuno suppongasi minore del quadrante. Nella circonferenza ABD del raggio 1 [*fig.* 8.], dal medesimo punto A, s' intendano presi gli archi AB, AD, l'un de' quali sia il doppio dell' arco φ, e l' altro di θ; e tirato per A il diametro AR, giungansi le AB, BR, AD, DR, BD: è chiaro, che la corda AB sia il doppio del seno della metà dell' arco contermine AB, cioè quanto 2.sen.φ, e che AD sia quanto 2.sen.θ. Similmente le RB, RD saranno rispettivamente quanto 2.sen.($90^\circ - \varphi$) o 2.sen.($90^\circ - \theta$), cioè quanto 2.cos.φ e 2.cos.θ.

Or per lo quadrilatero ABRD inscritto nel divisato cerchio, è

$$BD \times AR = AB \times DR + AD \times RB$$

ossia, prendendo la metà di ciascuna di queste rette, e poi passando da esse alle linee trigonometriche, che si è quì sopra veduto dinotarne, sarà

$$\text{sen.}\ (\varphi + \theta) = \text{sen.}\varphi\ \text{cos.}\theta + \text{sen.}\theta\ \text{cos.}\varphi.$$

Inoltre prendasi l' arco A*d* uguale ad AD, e giungansi pure le corde A*d*, *d*B, *d*R, sarà di nuovo, pel quadrilatero A*d*BR inscritto in quel cerchio,

$$Bd \times AR = AB \times Rd - Ad \times RC.$$

E ripiegando dalle metà di queste corde a' seni e coseni degli archi φ, θ da esse rappresentati, si vedrà essere

$$\text{sen.}(\varphi-\theta) = \text{sen.}\varphi \cos.\theta - \text{sen.}\theta \cos.\varphi.$$

E perciò il seno della somma di due archi, *ec.* — *C.B.D.*

Corollario I.

46. Se l'arco θ fosse uguale all' altro φ, l'equazione di sopra ritrovata per sen. $(\varphi+\theta)$ si trasmuterebbe, pel seno dell' arco doppio, nella seguente.

$$\text{sen.}2\varphi = 2\text{sen.}\varphi \cos.\varphi$$

ch' è identica alla di già ritrovata nel §. 42.

Corollario II.

47. Suppongasi l'arco φ di 60°, e l'altro θ non maggiore di 30°; e riflettendo che il coseno di 60°, cioè sen. 30° = $1/2$ [3 .], le due formole di sopra assegnate per sen.$(\varphi+\theta)$ e sen.$(\varphi-\theta)$ si trasmuteranno nelle qui appresso, cioè

$$\text{sen.}(60^\circ+\theta) = \text{sen.}60^\circ \cos.\theta + 1/2\,\text{sen.}\theta$$
$$\text{sen.}(60^\circ-\theta) = \text{sen.}60^\circ \cos.\theta - 1/2\,\text{sen.}\theta$$

e sottraendo la seconda di esse dalla prima, si avrà

$$\text{sen.}(60^\circ+\theta) - \text{sen.}(60^\circ-\theta) = \text{sen.}\,\theta$$

onde $\text{sen.}(60^\circ+\theta) = \text{sen.}\,\theta + \text{sen.}(60^\circ-\theta)$

Adunque: *Il seno di un arco maggiore di* 60° *è quanto la somma di due seni, uno dell' eccesso dell' arco proposto su quello di* 60°, *e l' altro della differenza tra l' arco di* 60° *e l' eccesso poc' anzi detto.*

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA.

48. Il coseno della somma di due archi è quanto il prodotto de' coseni di essi archi, toltone quello de' loro seni. E'l coseno della differenza di due archi pareggia la somma de' prodotti poc' anzi detti.

Sieno come nel Teor. precedente φ e θ [*fig.* 9.] gli archi proposti, ed AB, AD i loro doppj presi nel cerchio del raggio 1. Per gli estremi A, D del minor arco AD conducansi nel cerchio i diametri AR, DH; e congiuntevi le corde AB, AD, BD, tirinsi le loro supplementali BR, AH, BH. Sarà, pel quadrilatero ABHR inscritto in questo cerchio,

$$BH \times AR = BR \times AH - AB \times RH$$

E passando dalla metà di queste corde a' respettivi seni e coseni degli archi φ, θ, con osservare che l' arco RH è uguale all'altro AD, sarà

$$\cos.(\varphi + \theta) = \cos.\varphi \cos.\theta - \text{sen.}\,\varphi\ \text{sen.}\,\theta.$$

Or preso l' arco $Ad = AD$, similmente per gli estremi A, d di questo si conducano nel detto cerchio i diametri AR, dh, e si tirino benanche le corde degli archi AB, Ad, Bd, e quelle de' supplementi loro. Sarà manifesto essere l' arco Rh uguale all'altro Ad. E per lo quadrilatero ABRh inscritto nel divisato cerchio dovrà essere

$$Bh \times AR = RB \times Ah + AB \times Rh.$$

E passando dalle corde a' seni ed a' coseni di cui esse sono i doppj, sarà

$$\cos.(\varphi - \theta) = \cos.\varphi \cos.\theta + \text{sen.}\,\varphi\ \text{sen.}\,\theta.$$

Laonde il coseno della somma di due archi *ec.* — *C.B.D.*

Corollario.

49. Ponendo nella prima delle formole del presente Teor. $\varphi = \theta$, si avrà

$$\cos. 2\varphi = \cos.^2\varphi - \text{sen.}^2\varphi.$$

la qual formola pel coseno dell'arco doppio paragonata con quella che si ottenne nel §. 44. dà

$$\cos.^2 \varphi + \text{sen.}^2 \varphi = 1$$

come fu dimostrato nel §. 35.

SCOLIO

Per le due precedenti Proposizioni.

50. Sebbene le formole quassù recate pel seno e coseno di un arco, che sia la somma o la differenza di due dati, si trovino dimostrate nel caso, che ciascuno di questi archi sia minore del quadrante: esse però, per mezzo di quanto fu stabilito nel Cap. III. possonsi egualmente estendere a due archi qualunque, che per le più generali considerazioni trigonometriche basterebbe che fossero rappresentati da $90^\circ + \varphi$ e $90 + \theta$.

In effetto s'incominci dal supporre, che un solo di questi archi sia $90^\circ + \varphi$, e l'altro continui tuttavia ad esser θ, sarà

$$\text{sen.}(90^\circ + \varphi) = \cos.\varphi \quad \cos(90^\circ + \varphi) = -\text{sen.}\varphi,$$

e $$\text{sen.}(90^\circ + \varphi + \theta) = \pm \cos.(\varphi + \theta)$$

(il segno + ha luogo quando l'arco $\varphi + \theta$ è minore del quadrante l'altro — quando n'è maggiore).

$$\text{sen.}(90^\circ + \varphi - \theta) = \cos(\varphi - \theta)$$

E sviluppando i secondi membri di queste due ultime equazioni, e poi sostituendo per $\cos.\varphi$ e $\text{sen.}\varphi$ le loro equivalenti espressioni poc' anzi indicate si avrà

$$\text{sen.}(90^\circ + \varphi + \theta) = \pm[\text{sen.}(90^\circ + \varphi)\cos.\theta + \text{sen.}\theta\cos.(90^\circ + \varphi)]$$

$$\text{sen.}(90^\circ+\varphi-\theta) = \ldots \text{sen.}(90^\circ+\varphi)\cos.\theta - \text{sen.}\theta\cos.(90^\circ+\varphi)$$

Cioè dinotando con α l'arco $90^\circ+\varphi$, sarà

$$\text{sen}(\alpha+\theta) = \pm\ [\ \text{sen.}\alpha\cos.\theta + \text{sen.}\theta\cos.\alpha\ ]$$

$$\text{sen.}(\alpha-\theta) = \ldots \text{sen.}\alpha\cos.\theta - \text{sen.}\theta\cos.\alpha$$

Similmente essendo

$$\cos.(\ 90^\circ+\varphi+\theta\ ) = -\ \text{sen.}(\ \varphi+\theta\ )$$
$$\cos.(\ 90^\circ+\varphi-\theta\ ) = -\ \text{sen.}(\ \varphi-\theta\ )$$

facendo le stesse operazioni e sostituzioni di poc' anzi, si avrà finalmente

$$\cos.(\ \alpha \pm \theta\ ) = \ldots \cos.\alpha\cos.\theta \mp \text{sen.}\alpha\,\text{sen.}\theta$$

Or suppongasi anche l'altro arco divenirne $90^\circ+\theta$, che dinoteremo per β, sarà pure $\text{sen.}(\ 90^\circ+\theta\ ) = \cos.\theta$, e $\cos.(\ 90^\circ+\theta\ ) = -\ \text{sen.}\theta$. Ed è poi

$$\text{sen.}\ [\ (90^\circ+\varphi)+(90^\circ+\theta)\ ] = \text{sen.}(180^\circ+\varphi+\theta) = \text{sen.}\ (\varphi+\theta)$$
$$\text{sen}\ [\ (90^\circ+\varphi)-(90^\circ+\theta)\ ] = \ldots\ldots\ \text{sen.}\ (\varphi-\theta)$$
$$\cos.\ [\ (90^\circ+\varphi)+(90^\circ+\theta)\ ] = \cos.(180^\circ+\varphi+\theta) = \mp\cos.\ (\varphi+\theta)$$

(secondochè l'arco $\varphi+\theta$ è minore del quadrante, o pur maggiore).

$$\cos.\ [(90^\circ+\varphi)-(90^\circ+\theta)\ ] = \ldots\ldots\ \cos,\ (\varphi-\theta)$$

Nelle quali quattro ultime equazioni, eseguendo gli sviluppi de'secondi membri di esse, e poi le sostituzioni invece di sen. φ, cos. φ, sen. θ, cos. θ delle loro equivalenti espressioni recate più sopra, si verranno ad avere i seni e coseni indicati ne'primi membri delle medesime, co' loro proprj segni.

E tal dimostrazione potrebbesi nel modo stesso continuare in appresso, sicchè poi indicando con A, B due archi qualunque, dovrà essere in generale.

$$\text{sen.}(\ A \pm B\ ) = \text{sen.}A\cos.B \pm \text{sen.}B\cos.A$$
$$\cos.(\ A \pm B\ ) = \cos.A\cos.B \mp \text{sen.}A\,\text{sen.}B$$

Avvertendo sempre, perchè i risultamenti sieno affetti dal loro proprio segno, che debbesi tener conto de' segni che appartengono a' seni e coseni degli archi dati.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA.

50. La tangente della somma di due archi è quanto la somma delle tangenti di essi divisa pel raggio minorato del prodotto di quelle tangenti.

E la tangente della loro differenza è quanto la differenza delle tangenti di essi divisa pel raggio accresciuto del prodotto delle medesime tangenti.

Essendo sen. $(\varphi+\theta) =$ sen. φ cos. $\theta +$ sen. θ cos. φ e . . . . . cos. $(\varphi+\theta) =$ cos. φ cos. $\theta -$ sen. φ sen. θ dividendo l'una equazione per l'altra, e sostituendo al quoziente de' primi membri tang. $(\varphi+\theta)$, si avrà

$$\text{taug. } (\varphi+\theta) = \frac{\text{sen.}\varphi \cos.\theta + \text{sen.}\theta \cos.\varphi}{\cos.\varphi \cos.\theta - \text{sen.}\varphi \text{ sen.}\theta}$$

E dividendo il numeratore e denominatore di questo fratto per cos.φ cos.θ, e sostituendo sempre al quoziente del seno per la coseno di un arco la tangente di questo, si avrà

$$\text{tang. } (\varphi+\theta) = \frac{\text{tang. } \varphi + \text{tang. } \theta}{1 - \text{tang.}\varphi \times \text{tang.}\theta}$$

E similmente dalle formole esprimenti il seno e il coseno della differenza di due archi si sarebbe ottenuto

$$\text{tang. } (\varphi-\theta) = \frac{\text{tang.}\varphi - \text{tang.}\theta}{1 + \text{tang}\varphi \times \text{tang.}\theta}$$

Che perciò la tangente della somma di due archi, *ec.*—*C.B.D.*

COROLLARIO.

51. Supponendo nell'espressione di tang. $(\varphi+\theta)$, esser $\varphi=\theta$, si avrà

$$\text{tang. } 2\varphi = \frac{2.\text{tang.}\varphi}{1 - \text{tang.}^2\varphi}$$

ch'è l'espressione della tangente dell'arco doppio.

PROPOSIZIONE X.

PROBLEMA.

52. *Ritrovare il seno dell' arco di 1'.*

I poligoni regolari di 16384 lati inscritto e circonscritto ad un cerchio del raggio 1, con un approssimazione portata fino a 15 cifre decimali, sono rispettivamente espressi da 3, 141592576586860 e 3, 141592692091258, come può rilevarsi nella maniera prescritta nelle Prop. 1 e 2 della Misura del cerchio. (*Corso di Geometr. vol.* II.). Ciò posto, siccome questi poligoni essendo simili sono proporzionali a' quadrati delle perpendicolari, che dal centro del cerchio si abbassano sopra due loro dati, delle quali quella che cade sul lato del poligono circonscritto è il raggio del cerchio; perciò sarà 3,141592692091258 a 3,141592576586860, come il quadrato del raggio al quadrato della perpendicolare che cade dal centro sopra un lato del poligono inscritto. Quindi se determinisi questo quarto proporzionale, e poi da esso si estragga la radice quadrata, si avrà tal perpendicolare in parti del raggio. Or perchè il poligono inscritto è uguale al rettangolo contenuto dal suo perimetro, e dalla metà della perpendicolare poc' anzi determinata; perciò se il numero 3, 141592576586860 si divida per l' altro che dinota la metà della perpendicolare poc' anzi ritrovata, il quoziente darà il perimetro di esso poligono (*Nota alla Mis. del Cerch. Prop.* I.), il quale si troverà espresso da 6, 283185278837425. Ed in simil guisa, dividendo il numero ch'esprime il poligono circonscritto per $1/2$, cioè per la metà del raggio, si determinerà il perimetro di quest' altro poligono, che sarà 6, 283185384418256. Laonde dividendo ciascun di questi due numeri per 16384, numero de' lati di ciascuno di tali poligoni, i quozienti 0, 000383495 1, e 0, 000383495 2, i quali non differiscono, che nella 10ma cifra decimale solamente, rappresenteranno due lati di essi. Adunque l'arco di cerchio, ch' è sotteso da un lato del poligono di 16384 lati, differiscesi

dalla sua corda per meno che $\frac{1}{10000000000}$ del raggio; e per conseguenza un tal arco e la sua corda, con un' approssimazione assai più che sufficiente per gli ordinarj usi trigonometrici, potranno prendersi per uguali. Ma quest' arco è precisamente di $1' \; 19'' \; 6''' \; 5'''' \; 37''''' \; 30''''''$, come può vedersi dividendo la circonferenza, e quindi 360° per metà, tante volte, quante se ne richiede per pervenire a 16384 parti, cioè 14. volte (*Prop.* 1 *mis. del cerch.*). Adunque con più ragione potrà supporsi, che si confonda colla corda contermine l' arco di $1'$; e perciò potrà stabilirsi la seguente proporzione, l' arco $1'$, $19''$, $6'''$, $5''''$, $37'''''$, $30''''''$ all' arco di $1'$, come la corda di quello, cioè 0, 000383$\frac{4}{9}$51 alla corda $1'$; della quale presane la metà, si avrà il seno dell' arco di mezzo minuto; e da questo si dedurrà poi quello di $1'$ [46.]. — *C. B. F.*

Corollario.

53. Nel prendere il valore del seno dell'arco di $1'$ da quello di mezzo minuto primo, cioè $30''$, servendosi dell'espressione sen. $1' = 2$. sen. $30''$ cos. $30''$, è facile il vedere, che cos. $30''$ sia presso che uguale al raggio, cioè ad 1; che perciò sen. $1' =$ 2. sen. $30''$.

Vale a dire, che si può a dirittura prendere per seno di $1'$ la corda di quest' arco.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA.

55. Esporre co' principj precedenti l' effettiva formazione del Canone Trigonometrico.

Per la Prop.prec. può ritrovarsi il valore numerico di sen $1'$. E supposto, come al solito, il raggio trigonometrico $= 1$, per la Prop. 4. si renderà noto cos. $1'$. Inoltre per lo Cor. 2

della Prop. 7 si determini sen. 2′. Ciò posto sarà, per lo Cor. della Prop. 6, sostituendo a φ l'arco di 1′, e perciò a 2φ, 3φ *ec.* quelli di 2′, 3′ *ec.*

$$\text{sen. } 3' = 2. \cos. 1' \text{ sen. } 2' - \text{sen. } 1'$$
$$\text{sen. } 4' = 2. \cos. 1' \text{ sen. } 3' - \text{sen. } 2'$$
$$\text{sen } 5' = 2. \cos. 1' \text{ sen. } 4' - \text{sen } 3'$$
$$\text{sen. } 6' = 2. \cos. 1' \text{ sen. } 5' - \text{sen. } 4'$$

ec.

Questa operazione, che potrebbe estendersi insino all'arco di 90°, cioè effettuandola per 5400 archi, che vadano successivamente crescendo di 1°, si arresti all'arco di 60°; e poi per lo Coroll. 2. Prop. 7, e con più agevol calcolo si rinverranno

$$\text{sen. } (60° + 1°) = \text{sen. } (59° + 59') + \text{sen. } 1'$$
$$\text{sen. } (60° + 2°) = \text{sen. } (59° + 58°) + \text{sen. } 2'$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\text{sen. } 61° = \text{sen. } 59° + \text{sen } 1°$$
$$\text{sen. } 62° = \text{sen. } 58° + \text{sen. } 2°$$

ec.

Rinvenuti i seni degli archi di un quadrante, i quali si sogliono distribuire in due colonne verticali, una contenente i seni fino a 45°, e l'altra, che comprende i coseni di questi archi cioè i seni da 89°+59′ a 45°, si potranno calcolare le loro tangenti, e seganti, colle analogie del n.° 19.

Ed ecco esposto il modo di costruire con sole operazioni della volgare aritmetica il canone lineare.

SCOLIO.

55. Siccome nell' uso ordinario di questo canone per la risoluzione de' triangoli, imbarazzerebbero non poco le lunghissime moltiplicazioni e divisioni, che convien fare; perciò i trigonometri hanno pensato di aggiungere al canone lineare i logaritmi corrispondenti a' numeri in esso contenuti; vale a dire hanno stabilito un' altra specie di canone, che dicesi *logaritmico*,

e ch'è quello di cui si fa uso. Ed in alcune Tavole si trova a dirittura rapportato il solo canone logaritmico, trascurandosi il lineare. Intanto sarebbe assolutamente superfluo il dir qui qualche cosa circa il canone logaritmico; poichè questo trovasi a sufficienza spiegato innanzi alle ordinarie *Tavole de' seni*; ed è facilissimo l'intenderlo a chi non ignora l'ordinaria teorica de' logaritmi volgari.

CAPITOLO V.

FORMOLE CIRCOLARI, CHE DEDUCONSI DALLE PROP. VII, VIII, E DA' LORO COROLLARJ.

56. Dalle formole rappresentanti il seno, e'l coseno della somma e della differenza di due archi, si possono ricavare molte espressioni trigonometriche utilissime, delle quali noi quì appresso recheremo le principali, che sono di un uso più frequente, e di alcune delle quali dovremo anche valerci a proposito in appresso nel presente Trattato.

57. In primo luogo, se per mezzo della Prop. VII. si cerchi l'espressione corrispondente a sen.$(n\varphi+\varphi)$, ed a sen.$(n\varphi-\varphi)$, cioè a sen.$(n+1)\varphi$, ed a sen.$(n-1)\varphi$, si rileverà, che debbano aver luogo le seguenti due equazioni

$$\text{sen.}(n+1)\,\varphi = \text{sen.}n\varphi\cos.\varphi + \text{sen.}\varphi\cos.n\varphi$$
$$\text{sen}\,(n-1)\,\varphi = \text{sen.}n\varphi\cos.\varphi = \text{sen.}\varphi\cos.n\varphi$$

la quali sommate iusieme danno

$$\text{sen.}(n+1)\,\varphi + \text{sen.}(n-1)\varphi = 2.\text{sen.}n\varphi\cos.\varphi$$

cioè, $\text{sen.}(n+1)\,\varphi = 2.\text{sen.}n\varphi\cos.\varphi - \text{sen.}(n-1)\,\varphi$

la quale equazione dà il seno dell'arco *multiplice* $n+1$ di un dato, per mezzo de' seni degli archi *multiplici* n, $n-1$ dello stesso, e del coseno dell'arco semplice. Ed essa coincide col Teorema delle corde dimostrato nel Cor. della Prop. VI.

Similmente dalla Prop. VIII. si rileverà, che debba essere

$$\cos.(n+1)\,\varphi = \cos.n\varphi\cos.\varphi - \text{sen.}n\varphi\,\text{sen.}\varphi$$
$$\cos.(n-1)\,\varphi = \cos.n\varphi\cos.\varphi + \text{sen}\,n\varphi\,\text{sen.}\varphi$$

dalle quali si otterrà per mezzo della loro somma

$$\cos.(n+1)\,\varphi = 2.\cos.n\varphi\cos.\varphi - \cos.(n-1)\,\varphi$$

la quale equazione dà il coseno di un arco *multiplice* $n+1$ di un dato per mezzo de' coseni di due archi *multiplici* n ed $n-1$ del medesimo e del coseno di questo. Ed essa coincide con l'altro Teorema dimostrato nello Scolio al n.° 44.

58. Dal §. 40. si ha

$$\cos.^2\varphi = \frac{1 + \cos.2\varphi}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad M$$

equazione che combinata con l' altra

$$\text{sen.}^2\varphi = 1 - \cos.^2\varphi$$

darà

$$\text{sen.}^2\varphi = \frac{1 - \cos.2\varphi}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad N$$

e questa, e la prima M risoluta per rispetto a cos. φ e sen. φ daranno

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\varphi}{2}}$$

$$\text{sen.}\varphi = \sqrt{\frac{1 - \cos.2\varphi}{2}}$$

che sono le espressioni del seno, e coseno dell' arco metà, date le stesse linee trigonometriche per l' arco doppio

59. Che se l' equazione

$$\text{sen.}2\varphi = 2.\text{sen.}\varphi \cos.\varphi \quad [\ 46.\ ]$$

si combini prima con l' altra M, e poi con N, se ne ricaveranno queste altre due, cioè

$$\frac{\text{sen.}2\varphi}{1 + \cos.2\varphi} = \frac{\text{sen.}\varphi}{\cos.\varphi} = \text{tang.}\varphi$$

$$\frac{\text{sen.}2\varphi}{1 - \cos.2\varphi} = \frac{\cos.\varphi}{\text{sen.}\varphi} = \text{cot.}\varphi$$

che, com' è chiaro, rappresentano la tangente, e la cotangente dell' arco metà espresse nel seno, e coseno dell'arco doppio.

60. Le formole finora recate possono bastare per far conoscere i principj per la costruzione algebrica del canone trigonometrico; ed apparterrà all' analisi trascendente l' estenderli, ed il renderli sì efficaci, ed agevoli per la costruzione delle Tavole, da dar risultamenti di un' approssimazione sì grande, che' ecceda i limiti del bisognevole ne' calcoli più accurati, che dipendono dalla Trigonometria e dalle Tavole; ma non è questo il luogo a proposito per esporre tali cose.

61. Dalle quattro formole de' numeri 45 e 48 se ne possono ricavare le seguenti altre, che sono come tanti Teoremi.

I. $\text{sen.}(\varphi+\theta) + \text{sen.}(\varphi-\theta) = 2.\text{sen.}\varphi\cos.\theta$

II. $\text{sen.}(\varphi+\theta) - \text{sen.}(\varphi-\theta) = 2.\cos.\varphi\,\text{sen.}\theta$

III. $\cos.(\varphi+\theta) + \cos.(\varphi-\theta) = 2.\cos.\varphi\cos.\theta$

IV. $\cos.(\varphi-\theta) - \cos.(\varphi+\theta) = 2.\text{sen}\,\varphi\,\text{sen.}\theta$

62. Or se si ponga $\varphi+\theta=\alpha$, $\varphi-\theta=\beta$; e quindi $\varphi=\frac{\alpha+\beta}{2}$, $\theta=\frac{\alpha-\beta}{2}$: e poi questi valori di φ, θ sostituiscansi nelle precedenti formole, esse si ridurranno a queste altre.

V. $\text{sen.}\alpha+\text{sen.}\beta = 2.\text{sen.}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

VI. $\text{sen.}\alpha-\text{sen.}\beta = 2.\cos.\frac{\alpha+\beta}{2}\text{sen.}\frac{\alpha-\beta}{2}$

VII. $\cos.\alpha+\cos.\beta = 2.\cos.\frac{\alpha+\beta}{2}\cos.\frac{\alpha-\beta}{2}$

VIII. $\cos.\beta-\cos.\alpha = 2.\text{sen.}\frac{\alpha+\beta}{2}\text{sen.}\frac{\alpha-\beta}{2}$

63. E dividendo le due formole n.° V. e VI. per l'altra n.° VII., si avrà

IX. $\frac{\text{sen.}\alpha+\text{sen.}\beta}{\cos.\alpha+\cos.\beta}=\frac{\text{sen.}\,1/2\,(\alpha+\beta)}{\cos.\,1/2\,(\alpha+\beta)}=\text{tang.}\frac{\alpha+\beta}{2}$

X. $\frac{\text{sen.}\alpha-\text{sen.}\beta}{\cos.\alpha+\cos.\beta}=\frac{\text{sen.}\,1/2\,(\alpha-\beta)}{\cos.\,1/2\,(\alpha-\beta)}=\text{tang.}\frac{\alpha-\beta}{2}$

64. E similmente dividendo l'equazione IX. per la X., si avrà

XI. $\frac{\text{sen}\,\alpha+\text{sen.}\beta}{\text{sen.}\alpha-\text{sen.}\beta}=\frac{\text{tang.}\,1/2\,(\alpha+\beta)}{\text{tang.}\,1/2\,(\alpha-\beta)}$

E da questa si ricava la seguente analogia

$$\text{sen.}\alpha+\text{sen.}\beta : \text{sen.}\alpha-\text{sen.}\beta :: \text{tang.}\frac{\alpha+\beta}{2} : \text{tang.}\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Cioè: *La somma de' seni di due archi sta alla loro differenza, come la tangente della semisomma di essi archi alla tangente della semidifferenza loro.*

65. Inoltre ponendo nell' espressione del seno dell' arco

doppio [46] $\frac{\alpha+\beta}{2}$ invece di φ, si otterrà

$$\text{XII. sen.}(\alpha+\beta) = 2.\text{sen.}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos.\frac{\alpha+\beta}{2}$$

66. Finalmente dividendo ciascuna delle equazioni n.° V. e VI. per questa XII., e poi riducendo, si avrà

$$\text{XIII.}\ \frac{\text{sen.}\alpha+\text{sen.}\beta}{\text{sen.}(\alpha+\beta)} = \frac{\cos.\ {}^1/_2\,(\alpha-\beta)}{\cos.\ {}^1/_2\,(\alpha+\beta)}$$

$$\text{XIV.}\ \frac{\text{sen.}\alpha-\text{sen.}\beta}{\text{sen.}(\alpha+\beta)} = \frac{\text{sen.}\ {}^1/_2\,(\alpha-\beta)}{\text{sen.}\ {}^1/_2\,(\alpha+\beta)}$$

E dalle formole qui recate i giovani potranno per loro esercizio ricavarne facilmente molte altre, che per brevità qui si tralasciano.

ELEMENTI
DI
TRIGONOMETRIA

LIBRO II.

PRINCIPJ DI TRIGONOMETRIA RETTILINEA.

INTRODUZIONE.

67. In ogni triangolo, oltre lo spazio che vi si contiene, vi sono pure, come l' è noto, tre lati e tre angoli; e queste sei grandezze hanno tra loro tal nesso, che da tre di esse date, se pur queste non sieno i soli angoli della figura, si possono le altre geometricamente ed in facil modo rilevare, come si ha dagli Elementi di Euclide. Ma non è così di loro, quando con valori aritmetici le une si espongono, e nella stessa divisa le altre vi si chieggono da esse. Imperocchè essendo trascendente il rapporto de' lati di un triangolo agli angoli ch' essi sottendono, niuna regola per l' indagine suddetta può mai sperarsi. Ad ottenere quindi la risoluzione del triangolo, sulla quale sono fondate le scienze geodesiche, ed astronomiche, e della quale grandissimo uso bisogna pur fare nelle matematiche sì pure che miste, i Geometri antichi inventarono il seguente ripiego. Essi costruivano prima il canone trigonometrico, che, come si è veduto nel libro precedente, presenta una tavola di corrispondenza tra i valori degli angoli e quelli delle di loro *funzioni*, cioè delle corrispondenti linee trigonometriche; e poi prescrissero certi rapporti di quelle funzioni

a'lati di un triangolo, dal che poi la risoluzione di questa figura riesciva facilissima a rilevarsi. Ed è della fissazione di questi rapporti, e della maniera di applicarli all'oggetto cui sono destinati, che passeremo ad occuparci nel presente libro.

Intanto è da avvertirsi, che i risultamenti de' problemi trigonometricamente risoluti sono approssimanti, come approssimanti sono i valori delle linee trigonometriche che vi si adoperano, e per le operazioni aritmetiche che su queste si fanno. Ed è da dolersi, che nella maggior parte delle Trigonometrie Elementari siasi trascurato di ciò avvertire a' giovanetti, non senza loro nocumento. Imperocchè nella parte elementare della Geometria, e nella sublime non si contemplano che le sole grandezze geometriche, e con metodi esatti e rigorosi tutto vien quivi rilevato, proposto e dimostrato; laddove nella Trigonometria rinvengonsi certe grandezze continue in valori aritmetici, e con metodi approssimanti risolvonsi i problemi. Ed i giovani passan di volo dall' un metodo all' altro, e da questo a quello ne ripiegano, ora contemplando le grandezze continue nella loro natura, ed ora sotto la mentita forma di discrete; e spesso non v' ha chi di quel divario gli avverta. Era dunque necessario, non solo per ragion di scienza, ma per utile de' giovani, premetter queste nozioni agli Elementi di Trigonometria, che quì imprendo a divisare brevemente e con chiarezza.

68. *Def.* I. I valori numerici de' lati e degli angoli di un triangolo si possono chiamare *parti* di esso. E ciò secondo la frase de' Trigonometri antichi.

69. *Def.* II. *Risolvere un triangolo* è il ritrovare tre delle sei parti del triangolo dalle altre tre che sieno date; se pur queste non sieno i soli tre angoli di tal figura.

70. *Cor.* Quando sieno dati i soli tre angoli di un triangolo, non si potrà da essi investigare il valore de' lati, ma semplicemente la di loro proporzione. Imperocchè esso in tal caso sarà dato di sola specie, e potrà averne infiniti altri equiangoli.

71. *Def.* III. La Trigonometria *Piana*, o *Rettilinea* è la scienza, che propone le regole, o principj per risolvere un triangolo.

CAPITOLO I.

PRINCIPJ PER LA RISOLUZIONE DE' TRIANGOLI.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

72. L' ipotenusa di un triangolo rettangolo sta a ciascun lato di esso, come il raggio trigonometrico al seno dell'angolo opposto ad un tal lato.

Imperocchè descrivasi col centro A [*fig.* 10.] intervallo AB l'arco circolare BD, rappresenterà BC il seno dell'arco BD, o sia dell'angolo BAC, CA ne sarà il coseno, o sia il seno di CBA, ch'è complemento di CAB. Adunque starà

AB : BC : : R : sen. BAC [30.];

ed AB : AC : : R : sen. CBA, ossia a cos. BAC.

COROLLARIO.

73. E dalle due precedenti analogie si rileverà facilmente che debba stare

BC : CA : : sen.BAC : sen. CBA, o a cos.BAC.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

74. In un triangolo rettangolo sta pure un lato all' altro, come il raggio trigonometriao alla tangente dell' angolo opposto all' altro lato,

Ed un lato sta all'ipotenusa, come il raggio trigonometrico alla segante dell' angolo adjacente.

Poichè, se descrivasi col centro A [*fig.* 10.], intervallo AC l'arco circolare CE; è chiaro, che CB dinoti la tangente dell' arco CE, e quindi dell'angolo in A, e che AB rappresenti la segante di quell' arco, o di quest'angolo. Laonde dovrà stare

AC : CB : : R : tang.A

AC : AB : : R : seg. A

e queste sono le due analogie proposte nel presente Teor.—*C.B.D.*

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA.

75. In ogni triangolo i lati sono come i seni degli angoli ad essi opposti.

Dal vertice A [*fig.* 11.] di uno degli angoli del triangolo ABC tirisi sul lato opposto la perpendicolare AD, si avrà nel triangolo rettangolo BAD, BA : AD : : R : sen.B [72.], e quindi R×AD=BA×sen.B.

E similmente si ricaverà dal triangolo CAD esser R × AD =CA×sen.C. Laonde dovrà risultare BA×sen.B=CA×sen.C; e quindi, considerando i seni come linee rette, si vedrà esser [14. VI.]

CA : BA : : sen. B : sen. C.

E nel modo stesso abbassando da B la perpendicolare sul lato AC si dimostrerà che sia

BA : BC : : sen. C : sen. A.

Quindi, per equalità, se ne conchiuderà anche

CA : BC : : sen. B : sen. A.

Che perciò in ogni triangolo *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

76. Se dal vertice di un angolo di un triangolo tirisi la perpendicolare sul lato opposto, dovrà stare questo lato su cui cade la perpendicolare, alla somma degli altri due lati, come la differenza di questi alla differenza, o pure alla somma de' segmenti formati dalla perpendicolare, secondo che essa cade dentro, o fuori del triangolo.

Dal vertice A [*fig.* 12 *e* 13.] del triangolo BAC si tiri sul lato opposto BC la perpendicolare AD, la quale cade dentro del triangolo nella figura 12, e fuori nell' altra 13; dovrà stare BC : BA + AC :: AC — AB : CD ∓ DB, ove il segno — pel quarto termine della proporzione ha luogo se la perpendicolare cade dentro del triangolo, e l' altro + se cade fuori di esso.

Col centro A, intervallo il minore AB degli altri due lati, si descriva il circolo EBF, che interseghi l' altro lato AC in F, E, ed il lato CB in *b*.

Ciò permesso, per la natura del cerchio, il rettangolo ECF è uguale all' altro BC*b*; adunque sarà BC : CE, o CA+AB:: CF, o CA—AB : C*b*; e questa C*b* per la figura 12. è quanto CD—DB, e per l' altra 13. è quanto CD + D*b*.

Adunque *ec.* — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

77. In ogni triangolo obbliquangolo il coseno di un angolo è uguale alla quantità che si ottiene dalla somma

de' quadrati de' lati che lo comprendono, meno quello del lato che gli è opposto, divisa pel doppio rettangolo di que' lati stessi.

Cioè nel triangolo BAC [*fig.* 14.], per un angolo qualunque di esso, come per esempio quello in A, dee essere

$$\cos. BAC = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2BA \times AC}$$

Imperocchè, se dal vertice B di uno degli altri angoli del triangolo si tiri sul lato opposto la perpendicolare BD, sarà $BC^2 = BA^2 + AC^2 \mp 2CA \times AD$, secondo l'angolo BAC è acuto, o ottuso. E poichè sta

$$1 : \cos.BAD :: BA : AD,$$

sarà

$$AD = \cos.BAD \times BA$$

e perciò

$$BC^2 = BA^2 + AC^2 \mp 2BA \times AC \times \cos. CAB.$$

Or nel caso che l'angolo BAC sia ottuso, è $\cos.BAD = -\cos. BAC$, che perciò ne' due casi si avrà sempre

$$BA^2 + AC^2 - BC^2 = 2BA \times AC \times \cos. BAC;$$

e quindi

$$\cos. BAC = \frac{BA^2 + AC^2 - BC^2}{2BA \times AC}$$

Che perciò in ogni triangolo *ec.* — *C.B.D.*

Scolio.

78. Indicando generalmente per A, B, C i tre angoli di un triangolo, e per a, b, c i lati che gli sono opposti, sarà

$$\cos. A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

espressione la quale potrà porsi anche sotto l' altra forma

$$\frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} - 1$$

che riducesi a

$$\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc} - 1$$

la quale riesce più agevole nel calcolo de' triangoli.

Inoltre sostituendo $2\cos.^2 \frac{1}{2} A - 1$ in luogo di cos.A [58.], si avrà

$$2.\cos.^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$$

e quindi $\cos. \frac{1}{2} A = \frac{1}{2} \sqrt{\left[\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{bc}\right]}$

che nel calcolo è anche più agevole della precedente.

Finalmente volendo l'espressione di sen.$\frac{1}{2}$ A, piuttosto che del coseno, basterà nella formola di cos.A, che risulta immediatamente dal Teorema, sostituire $1 - 2.\text{sen.}^2 \frac{1}{2} A$ in luogo di cos. A [58.], si avrà così

$$1 - 2.\text{sen.}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

cioè $$\text{sen.}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc}$$

e quindi $\text{sen.} \frac{1}{2} A = \frac{1}{2} \sqrt{\left[\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{bc}\right]}$

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

79. In ogni triangolo, la somma de'lati è alla loro differenza, come la tangente della semisomma degli angoli alla base alla tangente della semidifferenza di essi.

Si circonscriva al triangolo ACB [*fig.* 15.] il cerchio, e dal centro O di questo si tirino i raggi OG, OF perpendicolari ai lati AC, AB, e congiunto l'altro raggio OA, gli si abbassino dai punti G, F le perpendicolari GL, FH, che sono i se-

ni degli angoli GOA, AOF; finalmente giungasi la GF, e ad essa si tiri dal centro O la perpendicolare OM. E poichè l'angolo GOA è uguale all'angolo CBA, mentre l'arco GA sopra di cui insiste il primo, ch'è al centro O del cerchio, è metà dell'arco AGC sopra di cui insiste l'altro, che sta alla circonferenza del cerchio stesso; e l'angolo AOF è uguale a BCA, per la medesima ragione: perciò sarà l'angolo GOF quanto la somma degli angoli B, C; e quindi l'angolo GOM, ch'è metà dell'angolo GOF sarà la semisomma degli angoli B, C. Di più essendo l'angolo GOK=GOM+MOK, sarà esso uguale ad FOM+MOK, cioè=FOK+2KOM; e perciò GOK—KOF=2KOM: quindi KOM sarà la semidifferenza degli angoli GOK, KOF ossia B,C.

Or essendo simili i triangoli GKL, FKH, sta GK : KF :: GL : FH. Ma GL, FH sono seni degli archi GA, AF, e quindi degli angoli in B, C; e perciò proporzionali a' lati AC AB, opposti ad essi [75.]. Adunque sarà GK : KF :: CA : AB; e componendo GF : FK :: CA+AB : AB; e poi col dividendo ed invertendo applicato a quella stessa analogia, si avrà KF : GK—KF :: AB : AC—AB. Laonde, per equalità, dovrà stare GF : GK—KF :: CA+AB : CA—AB. Ma, presa MN=MK, GN sarà uguale a KF, e GK—KF è quanto GK—GN, cioè NK; adunque sarà CA+AB:CA—AB :: GF:NK, o pure :: GM : MK. Quindi, siccome, preso OM per raggio, le MG, MK rappresentano le tangenti degli ángoli MOG, MOK [74.], cioè $\frac{B+C}{2}$, e $\frac{B-C}{2}$; perciò si avrà

$$CA+AB : CA-AB :: \text{tang.}\frac{B+C}{2} : \text{tang.}\frac{B-C}{2}$$

Cioè la somma de' lati è alla loro differenza *ec.* — *C.B.D.*

ALITER

80. S'indichino con α, β gli angoli B, C del triangolo ACB: si rileverà dal *n.°* 75, che debba stare

$$\text{sen.}\alpha + \text{sen.}\beta : \text{sen.}\alpha - \text{sen.}\beta :: CA + AB : CA - AB,$$

Ma sen. α + sen β : sen. α — sen. β :: tang. $\frac{\alpha+\beta}{2}$: tang. $\frac{\alpha-\beta}{2}$ [64.*n*. XI.]. Adunque starà pure

$$CA+AB : CA-AB :: \text{tang.}\frac{\alpha+\beta}{2} : \text{tang.}\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\text{cioè} :: \text{tang.}\frac{B+C}{2} : \text{tang.}\frac{B-C}{2}$$

CAPITOLO II.

Applicazione de' principj stabiliti nel precedente capitolo all' effettiva risoluzione de' triangoli.

81. In ogni triangolo, dati due angoli è anche dato il terzo, ch' è il supplemento a due retti della somma de' due dati; e perciò nel triangolo rettangolo, se è dato uno degli angoli acuti, sarà dato anche l' altro. Di più in questo triangolo, se sono dati due lati, si conoscerà il terzo, per mezzo del Lemma premesso alla Prop. 4. Lib. I, e senza operazioni trigonometriche.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA.

82. In un triangolo rettangolo, dato l'un de' lati, ed un' altra delle sue parti ad arbitrio; determinare le rimanenti parti.

Caso I.

Sieno dati i cateti AC, CB [*fig.* 10.]. Per determinare l' angolo in B, si faccia

AC : CB : : R : tang. A [74.]

Si renderà nota per tal modo la tangente dell' angolo A; e quindi un tal angolo si rileverà dalle Tavole.

Caso II.

Che se diasi il cateto AC, e l' ipotenusa AB. Si troverà l' angolo in B facendo

AB : AC : : R : sen. B [72.]

donde si farà anche noto quello in A : e si sarebbe trovato direttamente questo, per mezzo della seguente analogia

AB : AC : : R : cos. A [72.]

CASO III.

E dandosi il cateto AC, ed uno degli angoli acuti A, e perciò anche l' altro B. Per determinare l'altro cateto BC, bisognerà fare

R : tang. A : : AC : CB [74.]

o pure sen. B : sen. A : : AC : CB [73. o 75.]

Ma la prima analogia è da preferirsi alla seconda; poichè il primo termine R di quella è il raggio.

E volendo l'ipotenusa AB, converrebbe fare

R : seg. A : : AC : AB [74].

o pure sen. B : R : : AC : AB [72.]

CASO IV.

Finalmente dandosi l'ipotenusa AB, ed uno degli angoli B alla base, e quindi l' altro A : se si voglia un cateto, come AC, si dovrà fare

R : sen. B : : AB : AC [72.]

E poichè non resta a fare altra combinazione nelle parti del proposto triangolo, oltre le fino a indicate; perciò si sarà risoluto il presente Problema. — *C. B. F.*

PROPOSIZIONE VIII.

PROBLEMA.

83. In un triangolo obbliquangolo, date tre delle sue parti, sempre compreso uno de' lati; determinare le rimanenti parti.

Caso I.

Sieno dati in primo luogo gli angoli in A, B [*fig.* 11.], e quindi l'altro in C, ed il lato AB; e si cerchino gli altri due lati BC, AC. Si faccia.

$$\text{sen.}C : \text{sen.}A :: BA : BC \quad [\ 75\ ]$$
$$\text{sen.}C : \text{sen.}B :: BA : AC$$

si avranno per tal modo i lati BC, AC.

Caso II.

Che se diansi i lati AB, AC e l'angolo C opposto ad uno di essi lati AB; si troverà l'angolo in B opposto all'altro lato AC, facendo

$$AB : AC :: \text{sen.}C : \text{sen.}B \quad [\ 75.\ ]$$

Quindi sen.B si farà noto; e dalle tavole si rileverà l'angolo B, per conseguenza quello in A, e finalmente il terzo lato BC [*cas.* 1.].

Che se co' dati stessi di poc' anzi si volesse ottenere direttamente il terzo lato BC. Dal vertice A dell' angolo opposto ad un tal lato, si abbassi sopra di esso la perpendicolare AD, sarà $DC = AC \cos.C$, $DA = AC \text{ sen.}C$; quindi $BD = \sqrt{(AB^2 - AC^2 \text{son.}^2C)}$, e perciò $BC = AC \cos.C \pm \sqrt{(AB^2 - AC^2 \text{ sen.}^2C)}$, ove il segno — del radicale, com'è facile ad avvertirsi colla semplice ispezione della figura, ha luogo quando l'angolo B è ottuso. Bisogna anche notare, che se fosse ottuso l'angolo dato in C, allora il suo coseno sarebbe negativo.

L'espressione di BC che si è ottenuta non può calcolarsi per logaritmi, a meno di una riduzione nella quale vi entra a parte un nuovo angolo; ond'è che nessun vantaggio si ha dall' aver ottenuto nel caso proposto il lato BC indipendentemente dall' aver prima determinato l'angolo B, e quindi quello in A, che perciò bisognerà condursi piuttosto in questo modo, come da dotti Trigonometri é stato avvertito.

SCOLIO.

È però da notarsi per questo secondo Caso, che se mai l'angolo dato è opposto al lato maggiore, allora l'angolo opposto all'altro lato dato dovrà essere necessariamente acuto; poichè dev'essere minore del dato, e quindi acuto, quando anche quello sia ottuso; mentre un triangolo non può avere due angoli ottusi, o uno ottuso, e l'altro retto. Che se poi l'angolo dato è opposto al lato minore, com'è nella fig. 12, in cui l'angolo dato C sta opposto al lato BA minore di AC, allora la specie dell'angolo opposto al lato AC sarà *dubbia*, cioè potrà esso essere acuto, o ottuso. In fatti descrivendosi col centro A, intervallo il lato minore AB il cerchio BEF; questo dovrà segare il lato BC in *b*, e congiunta la A*b* avrà gli stessi dati sì il triangolo ABC, che l'altro A*b*C; per conseguenza si sarà in dubbio se risolvasi l'uno o l'altro, a meno che le circostanze della quistione non tolgano l'incertezza.

Ed é anche chiaro, che per sapere il valore di BC, bisogna che sia nota la specie dell'angolo opposto al maggiore de' lati dati; altrimenti la BC resterà dubbia.

CASO III.

E se sieu dati i due lati BA, AC [*fig.* 15.], e l'angolo in A da essi compreso: si troverà ciascuno degli angoli alla base, facendo

$$AC+AB : AC-AB :: \text{tang.}\frac{B+C}{2} : \text{tang.}\frac{B-C}{2} \quad [79.]$$

Si avrà in tal modo la tangente dell' angolo, ch' è semidifferenza degli angoli B, C, e quindi un tal angolo si farà noto dalle tavole: e se esso si aggiunga alla metà della somma degli angoli B, C, si avrà l' angolo maggiore B, se tolgasene, si avrà il minore C.

Ed è facile a rilevarsi dall' analogia sopra recata, che quando non occorre di determinare, che solamente gli altri due angoli del triangolo, i lati dintorno al dato angolo non è necessario che sian dati di grandezza, ma basta che lo sieno di sola ragione.

Conosciuti gli angoli in B, C, il lato BC adjacente ad essi si determinerà pel Cas. 1.

Scolio.

Talvolta i lati AB, AC non sono dati in numeri naturali, ma bensì per mezzo de' logaritmi di essi, come avviene, per esempio, allorchè ne' calcoli di Astronomia si rilevano le distanze de' pianeti dal sole nelle tavole astronomiche costruite a quest'uso. In tal caso, per evitar di determinare in numeri naturali i suddetti lati, prima di procedere alla risoluzione del triangolo, il che risulterebbe di grande impaccio, si potrà usare il seguente ripiego.

Si supponga la CA [*fig.* 16.], ch' è il maggiore de' due lati, posta ad angolo retto colla BA, cioè come la cA, giungasi la Bc, starà

$$BA : Ac, \text{ o } AC :: R : \text{tang. } cBA \text{ [74.]}$$

e si avrà così l' angolo cBA, il quale sarà maggiore di 45°. Si dinoti un tal angolo per α. E poichè

$$\text{tang. } (\alpha - 45^\circ) = \frac{\text{tang. } \alpha - \text{tang. } 45^\circ}{1 + \text{tang. } \alpha \times \text{tang. } 45^\circ} \text{ [50.]}$$ si avrà,

sostituendo per tang. α l' espressione $\frac{AC}{AB}$ [75.], ed 1 per tang. 45°,

$$\text{tang. } (\alpha - 45^\circ) = \frac{AC - AB}{AC + AB},$$ e quindi $AC + AB : AC - AB :: R : \text{tang. } (\alpha - 45^\circ)$. Che perciò sostituendo alla prima di queste ragioni l' uguale tang. $\frac{1}{2}$ (B+C), o cot. $\frac{1}{2}$ A

: tang. $\frac{1}{2}$ (B—C) [79.], sarà

R : tang. (α—45°) :: cot. $\frac{1}{2}$ A : tang. $\frac{1}{2}$ (B—C).

CASO IV.

Finalmente se sieno dati i tre lati BC, CA, AB [*fig.* 14.] e si cerchino gli angoli.

L' angolo A si otterrà facilmente, per mezzo di una delle due formole esibite nel numero 78. Ed un altro de' suoi angoli si potrà ottenere o nel modo poc' anzi detto, o come nel Cas. II. E da questi due angoli resterà poi determinato il terzo.

SCOLIO.

84. Nelle ricerche che si fanno per la risoluzione de' triangoli, bisogna, quanto più si può, aver l' avvertenza di dedurre ciascuna parte che si cerca direttamente dalle parti date, evitando d' implicare nella determinazione di esse qualche altra parte incognita del triangolo, che siasi precedentemente determinata.

Imperocchè non essendo che approssimanti per loro natura i quarti proporzionali, che derivansi da analogie ove sienvi quantità trigonometriche, e 'l più delle volte divenendolo anche tanto meno, per le operazioni aritmetiche che conviene fare per rinvenirli, sempre che si farà uso di essi per termine di un' altra analogia, il quarto termine di questa, alle due precedenti imperfezioni che lo fanno deviare dall' esattezza, unirà anche l' altra del non esatto valore del termine impiegato.

CAPITOLO III.

DELLA MANIERA DI DETERMINARE I SEGMENTI DELLA BASE E LA PERPENDICOLARE, NE' DIVERSI CASI DI RISOLVIMENTO PROPOSTI NEL PRECEDENDE CAPITOLO PE' TRIANGOLI OBBLIQUANGOLI; E DI ALCUNE ALTRE RICERCHE ANALOGHE.

85. Le considerazioni esposte nello Scolio in fine del precedente Capitolo ci hanno determinato all'oggetto quassù proposto pel presente, a fin di mostrare in qual modo la perpendicolare ed i segmenti della base in un triangolo obbliquangolo possansi ottenere direttamente dalle tre parti date di esso, senza frammezzarvi altre di quelle che vi erano incognite.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA.

86. Nel triangolo ABC [*fig.* 14.], dati gli angoli in A, C, e 'l lato adjacente CA; ritrovare i segmenti AD, DC di questo lato, e la perpendicolare BD, che cade sopra di esso dall' angolo opposto.

Nel triangolo BDC sta DC : DB :: cot. C : R, e nell' altro triangolo BDA si ha parimente DB : DA :: R : tang.DBA, o cot. BAD, che dinoterò per cot. A; quindi si avrà, per equalità, DC : DA :: cot. C : cot.A., o :: tang. A : tang. C. E da quest' ultima analogia si rileva facilmente che stia

$$DC+DA : DC-DA :: \text{tang. } A + \text{tang. } C : \text{tang. } A - \text{tang. } C$$

$$:: \frac{\text{sen.} A}{\cos.A} + \frac{\text{sen.} C}{\cos.C} : \frac{\text{sen.} A}{\cos.A} - \frac{\text{sen } C}{\cos.C} \quad [19.]$$

$$:: \frac{\text{sen.} A \cos.C + \text{sen.} C \cos.A}{\cos.A \cos.C} : \frac{\text{sen.} A \cos.C - \text{sen.} C \cos.A}{\cos.A \cos.C}$$

o sia :: sen. (A + C), cioè sen. B : sen. (A — C) [45.]. Che perciò essendo dato quest'ultimo rapporto, e l'un de' termini del primo, secondo che la perpendicolare BD cade dentro o fuori del triangolo, sarà anche dato l' altro termine di esso; e quindi si avranno i segmenti AD, DC della base

Per aver poi la perpendicolare BD si osservi, che DA=DBcot.A, e . . DC = DB cot. C; che perciò

$$AC = DB\ (\text{cot. } C + \text{cot. } A)\ [22.]$$

$$= DB \left[\frac{\cos.C}{\text{sen.} C} + \frac{\cos.A}{\text{sen.} A} \right]$$

$$= DB \left[\frac{\text{sen.} A \cos.C + \text{sen.} C \cos.A}{\text{sen.} C\ \text{sen.} A} \right]$$

$$= DB \frac{\text{sen. } (C + A)}{\text{sen.} C\ \text{sen.} A}$$

E quindi $DB = \frac{AC\ \text{sen.} C\ \text{sen.} A}{\text{sen.} (A+C)} = \frac{AC\ \text{sen.} C\ \text{sen.} A}{\text{sen. } B}$ [21.]

Ed è mediante questa formola che resta risoluto trigonometricamente il Prob. I. della Sezione IV Cap. II. dell'Aritmetica Universale del Newton.

SCOLIO.

87. Dalla prima parte della soluzione del presente Problema si rileva che: *I segmenti di un lato di un triangolo, prodotti in esso dalla perpendicolare che gli si abbassa dal vertice dell' angolo opposto, sono come le tangenti degli angoli che gli corrispondono alternamente.*

PROPOSIZIONE X.

PROBLEMA.

83. Dati i tre lati del triangolo ABC (*fig.* 14), esibire i segmenti AD, DC di un di questi, prodotti dalla perpendicolare abbassata ad esso dall'angolo opposto: e di più una tal perpendicolare.

I segmenti AD, DC dalla base si avranno facendo AC : BC + BA :: BA — BC : DC ∓ DA [76.]; ed ottenutosi questo quarto termine, sarà facile a rilevarne i segmenti DC, DA, venendo sempre ad esser data la somma e la differenza di essi.

Per ottener poi la perpendicolare BD indipendentemente da' segmenti AD, DC, si procederà nel seguente modo

Nel n.° 78 si è ottenuto

$$\text{sen. } \tfrac{1}{2} A = \tfrac{1}{2} \sqrt{\left[\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{bc} \right]}$$

$$\text{cos. } \tfrac{1}{2} A = \tfrac{1}{2} \sqrt{\left[\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{bc} \right]}$$

Adunque sarà sen.$\tfrac{1}{2}$Acos.$\tfrac{1}{2}$A, cioè $\tfrac{1}{2}$sen.A [46.], o sia $\frac{BD}{2AB}$,

$$\text{cioè } \frac{BD}{2c} = \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{bc}} \times \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{bc}}$$

e quindi

$$BD = \frac{1}{2b} \sqrt{\left[(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a+c-b) \right]}$$

nella quale espressione, come si vede, basta sostituire i valori de' lati di un triangolo per aver la perpendicolare, che, pel presente caso, cade sul lato b, cioè AC, dal vertice dell'angolo B che gli è opposto. Ed una tal formola potrà agevolmente modificarsi per gli altri casi.

SCOLIO.

89. Facendo $a+b+c=2p$, sarà $a+b-c=2p-2c$, $a+c-b=2p-2b$, $b+c-a=2p-2a$; e quindi la perpendicolare BD si potrà esprimere per mezzo di una semplicissima ed ovvia riduzione, nella seguente altra maniera più elegante, cioè

$$\frac{2}{b}\sqrt{[p(p-a)(p-c)(p-b)]}$$

E da essa si rileva facilmente, che l'espressione dell'aja di un triangolo ne' suoi lati sia la seguente

$$\sqrt{[p(p-a)(p-c)(p-b)]}$$

cioè, *la radice quadrata del prodotto che ha per fattori la semisomma de' lati, e le tre differenze di ciascun lato da questa.*

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA.

90. Dati nel triangolo ABC (*fig.* 14.) i lati AB, BC, e l'angolo ABC da essi compreso; determinare i segmenti ABC, DBC di questo angolo, prodotti dalla perpendicolare che cade sul lato ad esso opposto.

Essendo BD = CB cos.CBD = AB cos. ABD, sarà CB cos.CBD = AB cos. ABD, e perciò CB : AB :: cos. ABD : cos.CBD; dalla qual proporzione è facile il rivelarne l'altra CB+AB : CB—AB :: cos. ABD+cos. CBD : cos.ABD — cos. CBD; cioè [*n*°.VII. e VIII. §. 62.] come

$$\cos.\frac{ABD+CBD}{2}\cos.\frac{CBD-ABD}{2} : \text{sen.}\frac{ABD+CBD}{2}\text{sen.}\frac{CBD-ABD}{2}$$

e chiamando β l'angolo ABD ed α l'altro CBD, sarà

$$AC+CB:AC-CB::\cos.\frac{\alpha+\beta}{2}\cos.\frac{\alpha-\beta}{2}:\text{sen.}\frac{\alpha+\beta}{2}\text{sen.}\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\text{cioè} :: \frac{\cos.\frac{\alpha+\beta}{2}}{\text{sen.}\frac{\alpha+\beta}{2}} : \frac{\text{sen.}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos.\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

o :: tang. 1/2 (CBD—ABD) : tang. 1/2 (CBD+ABD).

E dall'esser noto l'un de'termini della seconda ragione di quest' ultima analogia, quello cioè ch' esprime l' angolo dato ABC, si farà anche noto l'altro termine, ottenuto il quale resteranno determinati gli angoli cercati CBD, ABD.

Scolio.

91. Quest' ultimo risultamento, che offre la soluzione del presente problema, dà un' altra maniera onde risolvere il triangolo ABC, dato l' angolo ABC, ed i lati che lo comprendono, diversa da quella che n' è stata esibita nel Caso III. della Prop. VIII. del presente Libro.

PROPOSIZIONE XII.

PROBLEMA.

92. Nel triangolo ACB [*fig.* 17.] in cui si divida per metà un angolo di esso ACB per mezzo della CD; si vuol determinare i segmenti che tal linea retta CD produce nel lato ad esso opposto, dati che sieno o un tal lato e gli angoli adjacenti A, B, o pure i tre lati del triangolo.

Parte I. Sieno dati gli angoli in A, B e'l lato AB. E poichè $CD = \frac{BD\ \text{sen.}B}{\text{sen.}\ BCD} = \frac{AD\ \text{sen.}A}{\text{sen}\ BCD}$, saranno queste due quan-

tità ultime tra loro uguali, e quindi BD : AD :: sen.A : sen B. e BD + AD : BD − AD : : sen.A + sen. B : sen A — sen. B cioè : : tang. ½ (A+B) : tang. ½ (A—B) [XI.61.]. Laonde sarà

$$BD - AD = \frac{AB \times \text{tang. } \frac{1}{2}(A-B)}{\text{tang } \frac{1}{2}(A+B)}$$

Quindi avendosi la differenza de' segmenti BD, DA, e la loro somma AB, si farà noto ciascun di questi.

PARTE II. Che se sieno dati i tre lati del triangolo; la differenza de' segmenti del lato AB si otterrà geometricamente per mezzo della 3. del Lib. VI. di Euclide, e senza far uso della Trigonometria.

PROPOSIZIONE XIII.

PROBLEMA.

93. Trovare i valori de' segmenti ACD, DCB [*fig.* 18.] dell'angolo ACB, prodotti da una linea CD, che divide per metà il lato opposto AB; nel caso che sia dato l'angolo diviso, ed i lati AC, CB, che lo comprendono.

$$\text{Essendo } CD = \frac{BD \text{ sen } B}{\text{sen. } BCD} = \frac{AD \text{ sen.} A}{\text{sen. } ACD}$$

saranno uguali queste due espressioni diverse della CD; e perciò essendo BD = AD starà

sen.BCD : sen.ACD : : sen.B : sen.A : : AC : BC

e quindi

AC+BC : AC — BC :: sen BCD+sen.ACD : sen.BCD—sen.ACD : : tang. ½ (BCD+ACD) : tang. ½ (BCD—ACD); che perciò si farà nota tang. ½ (BCD—ACD) [XI.64.], e per mezzo di essa sarà poi facile il rilevare i valori degli angoli ACD, BCD.

CAPITOLO IV.

Di alcuni altri casi in cui le tre parti date per la risoluzione di un triangolo sono diversamente combinate.

94. Oltre le principali combinazioni di tre parti di un triangolo necessarie per la determinazione delle rimanenti, del quale oggetto si è trattato nel Cap. II. del presente Libro, possono anche aver luogo per la risoluzione del triangolo diverse altre combinazioni di dati, delle quali passeremo ad esporne alcune ne' seguenti Problemi. Queste tali combinazioni debbono però esser sempre tali, che implicitamente contengano tre parti date del triangolo, ciascuna indipendentemente dalle altre due.

PROPOSIZIONE XIV.

Problema.

95. Nel triangolo BAC (*fig.* 19.) sieno dati i lati AB, AC, e la somma, o la differenza degli angoli B, C alla base; si vuol risolvere il triangolo.

Poichè $AC+BA : AC-AB :: \text{tang.}\frac{B+C}{2} : \text{tang.}\frac{B-C}{2}$; perciò se è nota $\frac{B+C}{2}$ si otterrà $\frac{B-C}{2}$; ed al contrario.

PROPOSIZIONE XV.

PROBLEMA.

96. Risolvere il triangolo BAC (*fig.* 19.) in cu sieno noti gli angoli, ed AC + AB, o AC—AB.

Si otterrà la differenza de' lati AC, AB, se era data la somma di essi, o al contrario la somma se n'era data la differenza, per mezzo della seguente analogia

$$\text{tang.}\frac{B+C}{2} : \text{tang.}\frac{B-C}{2} :: AC+AB : AC-AB$$

PROPOSIZIONE XVI.

PROBLEMA.

97. Le cose date per risolvere il triangolo BAC (*fig.* 19.) sieno l'angolo A, il lato BC che lo sottende, ed AC + AB, o AC — AB.

PARTE I. Sia nota AC — AB. E poichè sen A, sen. B, e sen. B — sen. C sono in ordinata ragione con BC, AC ed AC—AB, sarà

$$\text{sen. } A : \text{sen. } B - \text{sen. } C :: BC : AC - AB$$

e perciò $BC = \frac{\text{sen.}A\ (AC-AB)}{\text{sen. } B - \text{sen } C} = \frac{\text{sen.}(B+C)\ (AC-AB)}{\text{sen } B - \text{sen. } C}$

$$= \frac{2.\ \text{sen } \tfrac{1}{2}(B+C)\ \text{cos. } \tfrac{1}{2}(B+C)\ (AC-AB)}{2.\ \text{sen } \tfrac{1}{2}(B-C)\ \text{cos } \tfrac{1}{2}(B+C)}$$

$$= \frac{\text{sen. } \tfrac{1}{2}(B+C)\ (AC-AB)}{\text{sen. } \tfrac{1}{2}(B-C)}$$

Or sen. $\tfrac{1}{2}(B+C) = \text{cos. } \tfrac{1}{2} A$.

Adunque sarà

$$\text{sen. } \tfrac{1}{2}(B-C) = \frac{(AC-AB)\ \text{cos } \tfrac{1}{2} A.}{BC}$$

Parte II. Sia or data AC+AB. Ed essendo come poc'anzi

$$\text{sen. } A : \text{sen. } B + \text{sen. } C :: BC : AC + AB$$

sarà facile per mezzo degli stessi passaggi di poc'anzi di ottenere la seguente formola

$$\cos. \tfrac{1}{2} (B-C) = \frac{(AB+AC) \text{ sen. } \tfrac{1}{2} A.}{BC}$$

Scolio I.

98. Ottenutosi l'angolo ch'è semidifferenza di quelli alla base del triangolo proposto, cioè $\frac{1}{2}$ (B—C), la determinazione de' lati AC, AB ne segue immediatamente; poichè nel caso della Parte I. del Probl., ove supponesi nota la AC—AB, la formola della Parte II darà il valore di AC+AB: ed al contrario, supponendo nota la AB+AC, come nella Parte II., la formola della Parte I. darà il valore di AC—AB.

Scolio II.

99 Il triangolo proposto si sarebbe potuto risolvere prendendo sul lato CA [*fig.* 20.] la CE=CA+AB, o a CA—AB; e poi risolvendo il triangolo BEC in cui verrebbe ad esser dato l'angolo in E, ed i due lati BE, BC; ma la prima soluzione è preferibile.

PROPOSIZIONE XVII.

PROBLEMA.

100 Sieno dati nel triangolo BAC [*fig.* 20] l'angolo in C, il lato adjacente CB, e la somma o la differenza degli altri due lati, risolverlo.

Si prenda nell'altro lato CA dell'angolo dato C la CE= CA + AB, o a CA — AB, e giungasi la BE, si faranno noti nel triangolo EBC due lati e l'angolo compreso; che perciò esso potrà risolversi: ed è pur facile il ravvisare come da tal risoluzione si possa passare a quella del triangolo proposto ABC.

PROPOSIZIONE XVIII.

PROBLEMA.

101. Risolvere il triangolo BAC [*fig.* 11.] in cui sieno dati il lato BA, l'angolo C ad esso opposto, ed il rettangolo de' lati BC, CA che lo comprendono.

Essendo $BC^2+CA^2=AB^2+2BC\times CA\ \cos.C$,

sarà $(BC+CA)^2=AB^2+2BC\times CA\ (\cos C+1)$

e $(BC-CA)^2=AB^2+2BC\times CA\ (\cos.C-1)$

donde si ricaverà

$$BC+CA=\sqrt{[AB^2+2BC\times CA\ (\cos C+1)]}$$
$$BC-CA=\sqrt{[AB^2+2BC\times CA\ (\cos C-1)]}$$

dalle quali due ultime equazioni è facile il rilevarne i valori delle BC, CA.

Volendo poi il valore degli angoli in B, A indipendentemente da quello de' lati BC, CA, si procederà nel seguente modo

$$BA : \text{sen}.C :: AC : \text{sen}.B :: BC : \text{sen}\ A\ [75.].$$

Laonde sarà $BA^2 : \text{sen}^2C :: AC\times BC : \text{sen}.A\ \text{sen}\ B$.

$\text{sen}\ A\ \text{sen}\ B = \frac{1}{2}\cos.(A-B) - \frac{1}{2}\cos.(A+B)$ [61. IV.]. $= \frac{1}{2}\cos.(A-B) + \frac{1}{2}\cos.C$: che perciò se questo valore s' introduca nell' analogia di sopra, si avrà da essa

$$\cos(A-B) = \frac{2AC\times BC\ \text{sen}^2C}{BA^2} - \cos.C.$$

Laonde avendo il valore di cos (A—B), ed essendo pur noto l'altro di cos. (A+B), si potrà agevolmente ottenere gli angoli A, B.

PROPOSIZIONE XIX.

PROBLEMA.

102. Conoscendo i tre angoli di un triangolo, e la somma de' tre lati, risolverlo.

Essendo BC, CA, AB [*fig.* 11.] proporzionali con sen. A, sen. B, sen. C; si avrà, per la 12. del Lib. V. di Euclide,

$$\text{sen } A + \text{sen. } B + \text{sen } C : \text{sen. } A :: BC + CA + AB : BC$$

e quindi $$BC = \frac{\text{sen. } A\ (BC + CA + AB)}{\text{sen. } A + \text{sen } B + \text{sen. } C}$$

E similmente si determineranno gli altri due lati.

PROPOSIZIONE XX.

PROBLEMA.

103. Risolvere il triangolo BAC (*fig.* 11.), in cui sia data l'aja, l'angolo in B, ed il lato BC.

S'indichi l'aja per M^a, sarà $AD = \frac{2M^a}{BC}$; e perciò . . .

$BA = \frac{AD}{\text{sen. } B} = \frac{2M^a}{BC \text{ sen. } B}$, ed il rimanente lato AC, e gli altri angoli in A, C del triangolo proposto si potranno facilmente determinare.

PROPOSIZIONE XXI.

PROBLEMA.

104. Risolvere il triangolo BAC (*fig.* 11.), in cui sieno dati l'angolo BAC, il lato opposto BC, e la perpendicolare AD sopra di questo.

S'indichi per A l'intero angolo BAC. E poichè $\text{sen. } C = \frac{AB \text{ sen } A}{BC}$, e $\frac{AD}{\text{sen. } B} = \frac{AD}{\text{sen. } (A+C)}$, sarà perciò $\text{sen } C = \frac{AD \text{ sen. } A}{BC \text{ sen. } (A+C)}$; e quindi $\frac{AD \text{ sen. } A}{BC} = \ldots$ $\text{sen.}(A+C) \text{ sen. } C = \frac{1}{2} \cos. A - \frac{1}{2} \cos. (2C+A)$, il quale pareggiamento si ottiene per mezzo dell' equazione IV. del n.° 61. col porre in questa $\varphi = A+C$, e $\theta = C$. Laonde sarà $\cos.(2C+A) = \cos.A - \frac{2AD \text{ sen.} A}{CB}$. Dalla quale equazione si ha l'angolo $2C+A$, e quindi il solo angolo C; e finalmente l'altro B.

PROPOSIZIONE XXII.

PROBLEMA.

105. Risolvere il triangolo BAC [*fig.* 11.] in cui sia data la base BC, l'altezza AD, e la differenza degli angoli C, B alla base.

Esprimasi, per facilitazione del calcolo, BC per $2a$, AD per b, BD—DC per $2x$, che perciò sarà $BD = a+x$, $CD = a-x$, e la tangente nota di C—B sia dinotata da p

E poichè $\text{tang. } C = \frac{DA}{CD} = \frac{b}{a-x}$ [19.]; e similmente

. . . . tang B $= \frac{DA}{DB} = \frac{b}{a+x}$, sarà . . . .

$$\text{tang. } (C-B) = p = \frac{\frac{b}{a-x} - \frac{b}{a+x}}{1 + \frac{b^2}{a^2-x^2}} = \frac{2bx}{a^2+b^2-x^2} \quad [50.]$$

dalla qual' equazione sarà agevol cosa il rilevare il valore di x, e quindi quelli di BD, DC, per mezzo de' quali potrà poi completamente risolversi il proposto triangolo.

Scolio.

106. Il procedimento per la soluzione sarebbe lo stesso, se invece della differenza, fosse data la somma degli angoli C, B alla base.

PROPOSIZIONE XXIII.

PROBLEMA.

107. Risolvere il triangolo BAC [*fig.* 11.], dato l'angolo BAC, la somma BA+AC de' lati che lo comprendono, e la perpendicolare AD, che dal vertice di quell' angolo cade sul lato opposto BC.

Pongasi BA+AC$=2a$, BA—AC$=2x$, che perciò sarà espresso il lato AB da $a+x$, e l'altro AC da $a-x$: sia poi la AD espressa da b, e 'l coseno dell' angolo dato BAC da p; sarà

$$\cos. BAD = \frac{AD}{BA} = \frac{b}{a+x}, \text{ e } \cos. CAD = \frac{AD}{AC} = \frac{b}{a-x};$$

ond'è, che sarà poi sen.BAD $= \frac{1}{a+x}\sqrt{[(a+x)^2-b^2]}$

e sen. CAD $= \frac{1}{a-x} \sqrt{[(a-x)^2 - b^2]}$; che perciò essendo cos. BAC $= p$, sarà . . . . . .

$$p = \frac{b^2}{a^2-x^2} - \frac{1}{a^2-x^2} \sqrt{[(a^2-x^2)^2 - 2b^2(a^2+x^2)+b^4)]}$$

$$\text{cioè } p\,(a^2-x^2) = \sqrt{[(a^2-x^2)^2 - 2b^2(a^2+x^2)+b^4)]}$$

Dalla qual'equazione ottenutosi il valore di x, si verrà ad aver quelli de' lati BA, AC, ed il proposto triangolo resterà risoluto.

SCOLIO.

108. Nel modo stesso si sarebbe risoluto il Problema, se invece di BA + AC fosse stata data, BA —AC.

SCOLIO GENERALE.

109. Ne' problemi precedenti tutte le volte che co'dati proposti non si trova determinata qualcheduna delle parti del triangolo, bisogna, che questa si cerchi cogli ovvj principj esposti nel Cap. II. del presente Libro, dopo di aver esibite quelle, che nel problema si trovano determinate; essendo questo per que' casi, il mezzo più conveniente per rinvenirle.

ELEMENTI
DI
TRIGONOMETRIA

LIBRO III.

DE' TRIANGOLI SFERICI.

CAPITOLO I.

DEFINIZIONI, E NOZIONI PRELIMINARI.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

110. La comune sezione di un piano e di una sfera, è un cerchio.

La sfera BFAE [*fig.* 21.] sia segata dal piano ABC, sul quale dal centro O della sfera tirisi la perpendicolare OD; e presi ovunque nel perimetro della sezione ABC i punti B, C, giungansi le OB, OC, DB, DC. E poichè la OD è perpendicolare al piano ABC, gli angoli in D saranno retti [*dim.* 3. XI.]; e perciò i due triangoli rettangoli ODB, ODC, avendo uguali le loro ipotenuse OB, OC, ed il cateto

OD comune, dovranno avere anche uguali gli altri cateti DB, DC. Laonde tutti i punti del perimetro della sezione ABC sono equidistanti dal punto D, ch'è dentro di tal sezione; quindi essa sarà un cerchio, ed il punto D ne sarà il centro—*C.B.D.*

Corollario I.

111. Il centro di ogni cerchio, che rappresenta la sezione fatta in una sfera da un piano, è dunque quel punto dove questo piano è incontrato dalla perpendicolare abbassatali dal centro della sfera; e di più il quadrato del raggio di questo cerchio è quanto la differenza de' quadrati del raggio della sfera, e della distanza del centro di essa da quello della sfera.

Corollario II.

112. Ciò posto è manifesto, che a misura che si minorerà la distanza del centro di un di que' cerchi da quello della sfera, maggiore si farà il cerchio; e che questo diverrà il massimo, allorchè il piano che sega la sfera passa per lo centro di questa: che perciò

113. *Def.* 1. Tutti que' cerchi che hanno per centro quello della sfera si dicono *massimi*, e si chiamano poi cerchi *minori* tutti gli altri.

114. *Cor.* 1. Per due punti della superficie di una sfera, che non sieno diametralmente opposti, non vi passa che un solo cerchio massimo; poichè il piano di questo, dovendo passare anche per lo centro della sfera, viene a passare per tre punti, non posti in linea retta, e perciò è determinato [2. XI.].

115. *Cor.* 2. Di più due cerchi massimi intersegandosi in una linea retta, che passa per lo centro comune di essi, e perciò è un diametro, debbono dividersi scambievolmente per metà; e le loro circonferenze si verranno ad intersegare alla distanza di 180°.

116. *Def.* 11. Quel diametro della sfera, ch'è perpendicolare al piano di un circolo massimo, si dice suo *asse*: e gli estremi di un tal diametro ne sono i *poli*.

Questi punti si dicono anche poli di tutti gli altri cerchi paralleli a quel circolo massimo.

117. *Cor.* È chiaro dall'addotta definizione, che: *due cerchi massimi non possono avere un medesimo polo*: poichè altrimenti la congiungente un tal polo col loro centro comune, sarebbe perpendicolare a due piani diversi. Di più, che, *se per gli poli di un cerchio massimo ne passi un altro, gli archi di questo frapposti tra l'un de' poli e la circonferenza del primo cerchio debbono essere di* 90°.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

118. Il raggio di una sfera sta a quello di un di lei cerchio minore, come il raggio trigonometrico al seno dell'arco di cerchio massimo, ch'è tra la circonferenza del cerchio minore, ed il polo di esso.

Sia ABC [*fig.* 21.] un cerchio minore, il cui polo sia E; sarà il suo raggio DB seno dell' arco BE [10.]; ma nel triangolo rettangolo BDO sta l' ipotenusa OB, cioè il raggio della sfera al cateto BD, come il raggio trigonometrico al seno dell'angolo BOD, o dell' arco BE. Adunque *ec.* — *C. B. D.*

COROLLARIO.

119. Essendo i raggi di due cerchi come le loro circonferenze [*scol.prop* 3.*Arch.*] e quindi come le 6ome parti di queste, cioè come i loro gradi; ne segue, che: *il grado di un cerchio massimo sta a quello di un cerchio minore, come il raggio trigonometrico al seno dell' arco di cerchio massimo, ch'è tra il cerchio minore ed il suo polo.*

120. *Def.* 111. L' *angolo sferico* è la scambievole inclina-

zione di due archi di due cerchi massimi sulla superficie di una sfera.

121. *Def.* IV. Il *Triangolo sferico* è poi quella porzione di superficie sferica, ch'è terminata da tre archi di tre cerchi massimi.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA.

122. Se in due cerchi disuguali si adatti una stessa corda; l'arco più piccolo, che questa troncherà dal maggior cerchio, sarà minore dell'arco più piccolo, che la stessa taglierà dal cerchio minore.

Sieno ABK, ABH, [*fig.* 22.] i due cerchi, ed AB la loro corda comune; e quindi A, B que' soli punti ne' quali si potranno intersegare le loro circonferenze [10. III.]. Per gli loro centri F, G si tiri la linea retta EeHK, e giungansi le BH, HA, BK, KA: inoltre si tiri la AeL, e finalmente giungansi le Be, BL. E poichè gli angoli AeB, AKB fanno due retti, del pari che gli altri ALB, AHB [22. III.]; perciò quelli saranno uguali a questi. Ma l'angolo AKB è minore dell'angolo AHB [21. I.]; adunque l'altro angolo AeB dovrà esser maggiore di ALB; e quindi il punto e dell'arco AeB dovrà cadere al di sotto dell'altro arco AEB. E lo stesso dimostrandosi per ogni altro punto dell'arco AeB, ne segue perciò, che l'arco AEB dovrà esser maggiore dell'altro AeB. — *C. B. D.*

ALITER

123. I due cerchi proposti AED, *b*E*e* [*fig.* 23.], si supponga che si tocchino al di dentro in E; tirisi la retta EFG per gli loro centri, e s'intendano nell'uno, e nell'altro

cerchio applicate le corde uguali BC, *bc* perpendicolarmente alla retta EFG: è chiaro che se il centro F del cerchio *b*E*c* si supponga scorrere nella retta FE, finchè il punto K passi in H, cioè finchè la *bc* coincida colla BC, ed i punti *b*, *c* cadano sopra gli altri B, C; in tal caso l' arco *b*E*c* dovrà necessariamente comprendere l' altro BEC, e quindi esserne maggiore.

COROLLARIO.

124. Adunque: *l' arco di cerchio massimo minore della semicirconferenza rappresenta la minima distanza, sulla superficie della sfera, tra i due punti pe' quali esso passa.* Perciò l' arco di cerchio massimo è la misura naturale ed unica, anche perchè costante, di ogni distanza sferica, e quindi adopransi esclusivamente archi di cerchi massimi per lati de' triangoli sferici.

SCOLIO.

125. Che l' arco circolare AEB [*fig.* 27.], sia maggiore dell' altro A*e*B, si rileva facilmente del principio 1°. stabilito ne' Teoremi di Archimede; ed ecco in qual modo.

Si tirino agli archi AEB, A*e*B le tangenti AY, AX nel punto A dov' essi s' intersegano, e poi tirisi la AZ, che divida comunque l' angolo YAX compreso da quelle tangenti; una tal linea retta non potrà intersegare, che il solo arco esteriore AEB. Dal che chiaramente risulta, che si possa inscrivere in questo un perimetro, che non abbia di comune coll' arco A*e*B, che i soli estremi A, B. Ed è facile il vedere, che si possa anche circonscriver sempre all' arco A*e*B un' altro perimetro di cui due lati sieno parti delle tangenti tirate per gli punti A, B, e che affatto non interseghi quel primo. Or è chiaro che essendo l' arco AEB maggiore del perimetro in esso inscritto, sia anche maggiore dell' altro perimetro circonscritto all' arco A*e*B, e quindi di un tal arco.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

126. Se in una sfera si tirino i tre cerchi massimi ADB, AEB, AFB [*fig.* 24.], i quali abbiano lo stesso diametro AB; gli angoli sferici in A, o in B, che vengono formati dalle circonferenze di questi cerchi, saranno proporzionali agli archi DE, EF dell' altro cerchio massimo, cha ha per asse la AB, e che sono posti tra le circonferenze di que' primi cerchi: *cioè*, sarà l' angolo DAE all' altro EAF, come l' arco DE all' arco EF.

Imperocchè si prenda l'arco DC=DE, e l'altro FG=EF, s' intendano de scritti per gli punti C, G gli altri cerchi massimi ACB, AGB: è chiaro, che se il punto D passerà in E, l' angolo sferico CAD combacerà coll' altro DAE; che perciò essi saranno uguali. E similmente l' angolo GAF sarà uguale all' altro FAE. Laonde l' angolo CAE e l' arco CE saranno ugualmente multiplici dell' angolo DAE e dell' arco DE; come pure l'angolo EAG e l' arco EG, saranno ugualmente multiplici dell' angolo EAF e dell' arco EF. Ma è poi vero, che l'angolo CAE uguaglierà, sarà maggiore, o pur minore dell'angolo EAG, secondo che l' arco CE sarà uguale, maggiore, o minore dell' arco EG. Adunque dovrà stare l' angolo DAE all'angolo EAF, come l'arco DE all' arco EF [*def.* 5. V.] — *C.B.D.*

COROLLARIO.

127. Gli archi DE, EF essendo proporzionali agli angoli sferici DAE, EAF, potranno prendersi per loro misura: che perciò l' angolo sferico DAE sarà di tanti gradi e minuti, quanti ne contiene l' arco DE. Ma dello stesso numero di gradi e

minuti è pure l'angolo DOE al centro del cerchio HE[illegible] qual angolo misura l'inclinazione del circolo BEA al ci[illegible] BDA; quindi: *ogni angolo sferico è dello stesso [illegible]ero di gradi e minuti dell' angolo d' inclinazione de' piani de' cerchi, le circonferenze de' quali comprendono l' angolo sferico.* Che perciò potrà sempre prendersi questo invece di quello. E siccome se tirinsi a' cerchi ADB, AEB le tangenti AL, AM nel punto A, l' angolo LAM è quanto l' angolo DOE; perciò anche *l' angolo LAM compreso dalle tangenti i lati di un angolo sferico DAE nel vertice di esso, si può prendere per equivalente dell' angolo sferico.*

SCOLIO

128. Essendo di 360° l' intera circonferenza HEK, anche di 360° dovranno essere tutti gli angoli sferici, che si verranno a formare in A da quanti cerchi massimi si vogliono. E così si potrà dimostrare, che: *gli angoli sferici verticali sono uguali*; che: *gli angoli sferici conseguenti sono uguali a due retti*; ed altre cose, che per brevità si tralasciano di quì rapportare.

CAPITOLO II.

DELLA NATURA, E DELLE PROPRIETA' DE' TRIANGOLI SFERICI.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

129. Ogni lato di un triangolo sferico è minore di 180°.

Imperocchè sieno CD, DA [*fig.*25.] due lati di un angolo sferico; è egli chiaro, che per terminare un triangolo sferico, debbano questi esser segati da un terzo arco AC, prima che si riuniscano in B, alla distanza di 180° dal punto D. Adunque *ec.*—*C.B.D.*

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

130. La somma di due lati di un triangolo sferico è sempre maggiore del terzo.

Sia ABC [*fig.* 26.] un triangolo sferico. Si compia il circolo ABD, e preso l'arco BE=BC, si tiri la corda EA, la quale incontri in F il diametro BD, e giungansi le FC, CA. Or se il cerchio BED s'intenda rivolgersi dintorno al suo diametro BD, finchè il punto E coincida coll'altro C, coinciderà la EF colla FC, e gli sarà uguale: che perciò, siccome le CF, FA sono maggiori di CA, così sarà anche la EA maggiore della CA; e quindi l'arco EBA, ossia CB+BA, supposto che sia minore della semicirconferenza dovrà esser maggiore dell'arco CA. E se quell'arco fosse maggiore della semicirconferenza, sarà maggiore del suo supplemento a questa, il quale lo sarebbe dell'arco CA, — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA.

131. La somma de' tre lati di un triangolo sferico è sempre minore di 360°.

Sia il triangolo sferico ADC [*fig.*25.], i cui lati DA, DC si prolunghino fino ad incontrarsi di nuovo in B: ed essendo AC minore di AB+BC, ed AB+BC=360°—AD—DC; sarà AC minore di 360° — AD — DC. Laonde aggiuntovi di comune AD+DC, sarà AC+AD+DC minore di 360°—*C.B.D.*

COROLLARIO.

132. Quindi si potrà sempre supporre, che un triangolo sferico sia la base di un angolo solido, che ha per vertice il centro della sfera cui si appartiene un tal triangolo sferico, ed i cui angoli sono misurati da' lati [21. XI.].

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA.

133. Se in un triangolo sferico, preso per polo ciascun vertice de' suoi angoli, si descrivano tre archi di cerchi massimi; questi incontrandosi formeranno un altro triangolo sferico, i cui lati e gli angoli saranno supplementi degli angoli e de' lati del proposto.

PARTE I. Imperocchè essendosi descritto col polo A [*fig.*27.] l' arco DE, è chiaro che il punto E sarà distante per 90° dall' altro arco FB, che perciò lo stesso punto E, è anche a 90° di distanza da B: adunque il punto E sarà polo dell' arco AB.

E così pure si dimostra, che D sia polo di AC, ed F di BC. Ciò posto, si prolunghi l'arco AB in G, e l'altro AC in H: e poichè GE=90°=DH, sarà GE+DH=180°=DH+HE+GH =DE+GH. Ma GH è misura dell'angolo sferico A [127.]. Adunque DE è supplemento di A. Ed in simil guisa si dimostrerà essere DF supplemento di C, ed FE supplemento di B.

Parte II. Si prolunghi GA in L, sarà GL misura dell'angolo E. Ma GA=90°=BL, e perciò GA + BL, cioè GL + AB=180°. Adunque l'angolo E è supplemento dell'arco AB. Ed in simil maniera si dimostrerà esser l'angolo F supplemento di BC, e l'angolo D supplemento di AC.

Adunque se in un triangolo sferico *ec.—C.B.D.*

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA.

134. La somma de' tre angoli di un triangolo sferico, è sempre maggiore di 180°, e minore di 540°; *cioè* maggiore di due retti, e minore di sei.

Parte I. Imperocchè se la somma degli angoli di un triangolo sferico non è maggiore di 180°; la somma de' lati del triangolo supplementale sarà 360°, o anche di più. Lo che ripugna [131.].

Parte II. Che se la somma degli angoli di un triangolo sferico potesse pareggiar 540°, cioè 6 retti; o almeno l'un di essi dovrebbe esser maggiore di due retti, o ciascuno de' tre pareggiar due retti. E l'una cosa, e l'altra è impossibile; poichè in tal caso in questa stessa grandezza dovrebbero anch'essere gli angoli rettilinei, che rispettivamente gli pareggiano.

Corollario I.

135. Da ciò segue, che: *prolungandosi l'un de'lati di un*

triangolo sferico, l' angolo esteriore è sempre minore de' due interiori ed opposti. Poichè questi insieme col terzo angolo del triangolo fanno più di 180°; mentre quello insieme collo stesso terzo angolo sono uguali a 180°.

COROLLARIO II.

136. Che se un triangolo sferico ha un angolo retto, gli altri due possono essere o anche retti, o ottusi, o pure acuti; ma in quest' ultimo caso ciascun di essi dee esser sempre maggiore di 45°.

SCOLIO.

137. La somma degli angoli di un triangolo sferico potendo variare da 180° fino a 540°, ne segue, che ne' triangoli sferici non avviene come ne' rettilinei, che dati due angoli è dato anche il terzo: che perciò i tre angoli di un triangolo sferico non formano due dati, come ne' rettilinei; ma tre distinti.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA.

138. Due triangoli sferici che hanno i lati uguali l' un l'altro, e che sono nella stessa superficie sferica, hanno anche uguali gli angoli compresi da' lati uguali.

Cas. Sieno BAC, *bac* [*fig.*28.o.1.], i triangoli sferici proposti e primieramente i lati uguali corrispondenti alla stessa parte, cioè BA sia uguale a *ba*, CA a *ca*, e BC a *bc*. Sia inoltre O il centro della sfera alla quale essi si appartengono: e da questo punto s' intendano condotti i raggi a' vertici degli anguli de' proposti triangoli. É chiaro che si verranno in tal modo a costituire nel punto O due angoli solidi compresi ognuno da tre angoli uguali, l'

un l'altro, che perciò questi si potranno far combaciare; ed allora cadrà il punto *a* in A, *c* in C, *b* in B: quindi il triangolo sferico *bac* combacerà coll'altro BAC; e perciò gli sarà uguale.

Cas. Che se que' lati uguali non si corrispondano, come si vede nella figura 28. *n.* 2., ove il lato BC del triangolo BAC è da una parte, e l'uguale *bc* nell'altro triangolo *bac* è dall'altra; in tal caso è chiaro, come la figura stessa lo rappresenta, che i due triangoli sferici BAC, *bac* sieno propriamente quelli, che sottendono due angoli solidi verticali posti al centro O di una sfera. Or si vede, che il piano BA*ba* s'inclina all'altro BC*bc* sotto un angolo, ch'è uguale sì a quello compreso dagli archi BA, BC, che dagli altri *ba*, *bc*. Laonde i due angoli sferici ABC, *abc* sono tra loro uguali. E similmente si dimostrerà, che sia l'angolo ACB uguale all'altro *acb*, e l'angolo BAC uguale a *bac*. Adunque *ec.* — *C.B.D.*

Corollario.

139. Da questa proposizione se ne deriva l'altra, che: *Se due triangoli sferici, i quali sono nella stessa superficie sferica hanno gli angoli uguali, l'un l'altro; avranno anche uguali, l'un l'altro, i lati che sottendono questi angoli.* Poichè avendo i triangoli proposti uguali rispettivamente gli angoli, i loro supplementali avranno uguali rispettivamente i lati: quindi dovranno essere equiangoli; e perciò i loro supplementali, cioè i proposti, saranno equilateri tra loro. E ciò costituisce una differenza essenziale de' triangoli sferici da' rettilinei.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA.

140. Due triangoli sferici, che sono sulla medesima sfera, se hanno due lati uguali a due lati, l'un l'altro, e l'angolo compreso uguale all'angolo compreso; avranno la base uguale alla base.

Cas. Sieno ABC, *abc* i triangoli sferici proposti, e sieno essi primieramente tali, che i lati uguali si corrispondano in modo, che sia BA = *ba*, BC = *bc*, e l'angolo B = *b*. Giungansi le OA, OB, OC, O*a*, O*b*, O*c*. E poichè l'angolo sferico ABC è uguale all'altro *abc*, i piani OBC, O*bc* si dovranno similmente inclinare agli altri AOB, *a*O*b*; che perciò se l'un angolo solido si ponga dentro l'altro, essi dovranno combaciare; ed i punti A, C cadranno negli altri *a*, *c*. Adunque l'arco AC coinciderà coll'altro *ac*, e gli sarà uguale.

Cas. 2. Che se quei triangoli non sieno similmente disposti, come gli dinota la figura corrispondente, allora congiunto anche il centro O della sfera, cui essi si appartengono, co' punti A, B, C, *a*, *b*, *c*, è chiaro, che essendo gli archi BA, BC uguali agli altri *ab*, *bc*, sien pure gli angoli AOB, BOC uguali agli altri *a*O*b*, *b*O*c*; ma di più i piani AOB, *a*O*b* sono similmente inclinati agli altri COB, *c*O*b*; poichè gli angoli ABC, *abc* si sono supposti uguali. Adunque è facile il vedere, che, se pongasi il raggio BO in diretto coll'altro O*b*, debba il raggio AO essere in diretto con O*a*, e CO con O*c*: che perciò gli angoli AOC, *c*O*a* saranno uguali; e quindi anche gli archi AC, *ac*. — *C.B.D.*

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA.

141. Se due triangoli sferici di una stessa sfera, hanno un lato uguale ad un lato, e gli angoli adjacenti a questi lati sono anche uguali; saranno pure uguali i rimanenti lati, l'un l'altro, quelli, cioè, che sono opposti agli angoli uguali.

Cas. 1. Primieramente i proposti triangoli sferici BAC, *bac* [*fig.*28.*n.*1.] sieno disposti in modo, che si corrispondano gli angoli uguali, talchè essendo BA uguale a *ba*, sia l'angolo BAC=*bac*, e l'angolo ABC=*abc*; è manifesto, ch'essi si potranno far combaciare; e perciò sarà vero ciò che si è quì sopra enunciato.

Cas. 2. Che se gli angoli uguali non si corrispondano; allora è chiaro, che, congiunti i vertici degli angoli di ciascuno de' triangoli col centro O [*fig.*28.*n.*2.] della sfera, se suppongasi, che gli angoli uguali AOB, *b*O*a* sieno verticali; debbano, per l'uguaglianza degli angoli sferici CBA, *cba*, i piani BOC, *b*O*c* esser similmente inclinati allo stesso piano AB*ba*: che perciò questi ne costituiranno un solo; ed un solo piano costituiranno, per la stessa ragione, i due altri piani COA, *a*O*c*. Adunque le CO, O*c* rappresenteranno una sola linea retta; e quindi saranno uguali sì gli archi BC, *bc*, che gli altri CA, *ca*. — *C. B. D.*

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA.

142. Gli angoli alla base di un triangolo sferico isoscele sono uguali tra loro.

Ed un triangolo sferico, che ha due angoli uguali, ha pure uguali i lati che oppongonsi ad essi.

PARTE. I. Si divida per metà in D [*fig.* 29.] la base BC del triangolo sferico ABC, e per questo punto, e per l'altro A si faccia passare l'arco AD di cerchio massimo; è chiaro che i due triangoli sferici ABD, ACD, avendo i lati uguali, l'un l'altro, debbano avere anche uguali gli angoli in B, C, i quali sottendono gli uguali lati AC, AB.

PARTE II. Il triangolo sferico BAC [*fig.* 27.], avendo uguali gli angoli in B, C; il suo supplementale DFE dovrà avere uguali i lati EF, FD. Laonde anche gli angoli in D, E saranno uguali; e per conseguenza uguali saranno pure i loro supplementi, cioè i lati AC, AB del triangolo sferico proposto.

COROLLARIO I.

143. Quindi: *Un triangolo sferico, ch' è equilatero, dev' essere anch' equiangolo*; ed al contrario: *Un triangolo sferico equiangolo sarà equilatero.*

COROLLARIO II.

144. Di più, dalla dimostrazione della Parte prima si rileva, che l'angolo ADB pareggi l'altro ADC [*fig.* 29]; cioè che: *In un triangolo sferico isoscele, l'arco di cerchio massimo, che passa per lo vertice del triangolo, e per lo punto medio della sua base, è perpendicolare a questa.*

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA.

145. In ogni triangolo sferico, il maggior angolo è sotteso dal maggior lato, e il minore dal minore.

Il maggior lato poi è sotteso dall'angolo maggiore, ed il minore dal minore.

Parte I. Sia ADC [*fig.* 25.] un triangolo sferico, in cui l'angolo C sia maggiore dell'altro A; e per mezzo dell'arco C*d* si supponga fatto l'angolo AC*d* uguale a quello in A, sarà l'arco A*d*=C*d*; e quindi l'arco AD, ch'è quanto A*d*+*d*D, sarà uguale a C*d*+*d*D. Ma C*d*+*d*D è maggiore di CD [130.]: adunque anche AD sarà maggiore di CD.

Parte II. Che se nel triangolo sferico ADC, il lato AD suppongasi maggiore dell'altro CD; l'angolo C dovrà esser maggiore dell'altro A. Poichè nel caso che gli si supponesse uguale, sarebbe l'arco AD=DC [142.]; e supponendosi l'angolo C maggiore dell'altro A, ne risulterebbe l'arco CD maggiore di AD. E l'una, e l'altra cosa ripugna alla supposizione fatta.

Adunque in ogni triangolo sferico *cc.* — *C. B. D.*

ELEMENTI
DI
TRIGONOMETRIA

LIBRO IV.

PRINCIPJ DI TRIGONOMETRIA SFERICA.

CAPITOLO I.

PRINCIPJ GENERALI PER LA RISOLUZIONE DE' TRIANGOLI SFERICI.

146 Per brevità dinoteremo con A, B, C gli angoli di un triangolo sferico, indicando queste lettere, quelle che sono al vertice di essi, e con *a*, *b*, *c* esprimeremo que' lati di un tal triangolo, che sono rispettivamente opposti a quelli angoli.

147. *Def.* 1. La *Trigonometria Sferica* dà le regole per risolvere su i triangoli sferici quello stesso Problema, che la *Trigonometria Piana* risolve su i triangoli rettilinei, cioè: *Date tre di quelle che diconsi parti del triangolo sferico, non esclusi i tre angoli; determinare le tre parti che rimangono.*

SCOLIO.

148. Essendo sei le parti di un triangolo sferico, trigono-

metricamente considerato, delle quali in ogni quistione ne debbono esser date tre, non esclusi i tre angoli; ne segue, che le combinazioni delle parti date a tre per volta, dovrebbero esser venti. e Ma siccome in tali combinazioni alcune contengono la stessa specie di parti, essendovene sei nelle quali sono sempre dati due angoli, ed un lato opposto ad uno di essi; sei altre in cui sono dati due lati, ed un angolo ad un di essi opposto; e così pure tre in cui sono dati due angoli, ed un lato adjacente; e tre altre in cui sono dati due lati, e l angolo compreso; perciò le venti combinazioni suddette vengono ad esser comprese ne' sei casi seguenti, ne' quali resterà per conseguenza distinto il Problema generale sopra enunciato.

I°. *Se sien dati i tre lati.*
II°. *O i tre angoli.*
III°. *Se sien dati due lati, e l'angolo da essi compreso.*
IV°. *O pure due angoli, ed il lato che gli è adjacente.*
V°. *Se sien dati due lati, ed un angolo ad un di essi opposto.*
VI°. *O pure due angoli, ed un lato opposto ad un di essi.*

Or tutte le regole per la risoluzione di questi casi possono dedursi da' tre seguenti Teoremi.

PROPOSIZIONE. I.

TEOREMA.

149. In ogni triangolo sferico, i seni de' lati sono come i seni degli angoli ad essi opposti.

Sia CBA [*fig.* 30.] un triangolo sferico, ed i suoi lati CB, CA, AB sieno archi di cerchi massimi di una sfera, il cui centro sia S, e giungansi le CS, BS, AS. Ciò posto dal vertice di un qualsivoglia angolo C si tiri sul piano ad esso opposto ASB la perpendicolare CD; e poi da D su i lati SA,

SB si calino le perpendicolari DE, DF, e giungansi le CE, CF. E poichè il piano DEC è perpendicolare all' altro SAB [18.VI] ed SE, ch' esiste in questo piano è perpendicolare alla loro comune sezione DE; sarà perciò essa anche normale al piano CED [*def.*4. XI.]; e quindi alla retta CE che giace in esso. Che perciò essendo le CE, ED perpendicolari, nello stesso punto E, alla comune sezione SA de' piani SAC, SAB in cui esse rispettivamente esistono; l' angolo CED dinoterà l' inclinazione di tali piani [*def.* 6.XI.] E similmente si dimostra, che l' angolo CFD sia quello d' inclinazione del piano CSB all' altro SBA. Laonde gli angoli CED, CFD, che rappresentano le inclinazioni de' piani CSA, CSB, in cui esistono gli archi CA, CB, al piano ASB in cui è l' arco AB, si potranno prendere per gli angoli in A, B del triangolo sferico CAB [127.].

Or poichè nel triangolo rettilineo CED rettangolo in D, sta

CE : CD : : R : sen CED [72.]

e similmente nell' altro triangolo rettangolo DCF, sta

CD : CF : : sen. CFD : R

sarà, per equalità perturbata,

CE : CF : : sen. CFD : sen. CED.

Ma CE, CF sono rispettivamente i seni degli archi CA, CB cioè *b*, *a*; e gli angoli CFD, CED sono lo stesso che gli angoli in B ed in A del triangolo sferico CAB. Adunque sarà

sen. *b* : sen *a* : : sen. B : sen. A

E similmente si dimostrerà, che sia

sen *a* : sen *c* : : sen. A : sen C.

Dalle quali due proporzioni si ricaverà finalmente, per equalità ordinata, la terza.

sen *b* : sen *c* : : sen. B : sen. C

Laonde i seni de' lat. di un triangolo sferico *ec.* — *C.B.D.*

SCOLIO

150. Dalle tre precedenti proporzioni si ricavano le seguenti equazioni, cioè

sen. b sen. A = sen. a sen. B

sen a sen. C = sen c sen. A

sen. b sen. C = sen c sen. B

Per mezzo delle quali si risolvono facilmente i casi enunciati ne' precedenti numeri V. e VI., come si vedrà quì appresso.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

151. Il coseno di un lato di un triangolo sferico, è uguale al prodotto de' coseni degli altri due lati, aggiuntovi il prodotto de' seni di questi nel coseno dell'angolo da essi compreso.

Si supponga fatto l'apparecchio stesso del precedente Teorema, e poi dal punto E [*fig.* 30.] si tiri la EG perpendicolc alla SB, e per D si tiri alla stessa SB la parallela DH. Ed essendo gli angoli GES, GSE uguali ad un retto, essi pareggeranno l'angolo SDE, ch'è retto: laonde togliendone di comune l'angolo GES, resterà l'angolo GSE, o BSA uguale ad HED.

Or nel triangolo EHD rettangolo in H, dev' essere HD = DE sen. DEH = DE sen. BSA = DE sen. c; ed è poi DE = ECsen.ECD = ECcos.DEC = sen.$b$cos.A. Laonde sarà HD = GF = sen. b sen. c cos. A. Ma SG = SE cos. ESG = SE cos. c; ed SE = SC cos ESC = 1 × cos. b, (prendendo il raggio SC della sfera ABDC per raggio trigonometrico, e quindi = 1). Adunque sarà SG = cos. b cos. c. Per lo che essendo SF = SG + GF, sarà, sostituendo cos a ad SF, e per SG, e GF o DH i loro rispettivi valori trigonometrici quassù ritrovati,

cos. a = cos. b cos. c + sen. b sen. c cos. A

E poichè tal dimostrazione ragge ugualmente per cos. a, che per cos. b, e per cos. c; perciò, trasmutando nell'equazion

precedente l'a in b, o in c: ed al contrario, l'A in B, o in C, se ne otterranno le altre due

$$\cos. b = \cos. a \cos. c + \text{sen. } a \text{ sen. } c \cos. B$$
$$\cos. c = \cos. b \cos. a + \text{sen. } b \text{ sen. } a \cos. C.$$

Ed in generale il coseno di un lato è uguale *ec.* — *C.B.D.*

COROLLARIO.

152. Se nella prima equazione di questo Teorema si sostituisca il valore di cos. c preso dalla terza di esse, e l'altro di sen. $c = \frac{\text{sen. } a \text{ sen. } C}{\text{sen. } A}$, che si ricava dalla seconda equazione dello Scolio precedente, ne risulterà

$$\cos. a = \cos. b\,(\cos. b \cos. a + \text{sen. } b \text{ sen. } a \cos. C)$$
$$+ \text{sen. } b \text{ sen. } a \text{ sen. } C \times \frac{\cos. A}{\text{sen. } A}$$

dalla quale, prendendo il valore di $\frac{\cos. A}{\text{sen. } A}$, cioè di cot. A, sarà

$$\cot. A = \frac{\cos. a\,(1 - \cos. b^2) - \text{sen. } b \text{ sen. } a \cos. b \cos. C.}{\text{sen. } b \text{ sen. } a \text{ sen. } C}$$

E ponendo in tal' espressione sen. b^2 per $1 - \cos. b^2$ [35.], cot. a per $\frac{\cos. a}{\text{sen. } a}$, e cot. C per $\frac{\cos. C}{\text{sen. } C}$; si avrà

$$\cot. A = \cot. a \frac{\text{sen. } b}{\text{sen. } C} - \cos. b \cot. C$$

E se in vece di eliminar dalla prima equazione cos. c, e sen. c, si fosse eliminato cos. b, e sen. b; si sarebbe trovato ugualmente

$$\cot. A = \cot. a \frac{\text{sen. } c}{\text{sen. } B} - \cos. c \cot. B.$$

COROLLARIO.

153. Eliminando similmente nella seconda equazione del Teorema cos. c, e sen. c, o pur cos. a, e sen. a, si otterrebbero i

due valori di cot. B analoghi a' poc' anzi rinvenuti per cot. A. E nel modo stesso, coll' eliminazione di cos. a, sen. a, o pur di cos. b., sen. b nella terza di esse, si otterrebbero due espressioni corrispondenti a cot. C, cioè si avranno le seguenti quattro formole

$$\cot. B = \cot. b \frac{\text{sen. } a}{\text{sen. } C} - \cos. a \cot. C$$

$$\cot. B = \cot. b \frac{\text{sen. } c}{\text{sen. } A} - \cos. c \cot. A$$

$$\cot. C = \cot. c \frac{\text{sen. } a}{\text{sen. } B} - \cos. a \cot. B$$

$$\cot. C = \cot. c \frac{\text{sen. } b}{\text{sen. } A} - \cos. b \cot. A$$

Ma tali formole di cot. B, e cot. C, come di leggieri si comprende, e come lo mostra anche la semplice inspezione di esse, si possono facilmente ottenere permutando nelle due già avute per cot. A, l' A in B, o in C, e l' a in b, o in c. E noi in appresso, tutte le volte, che ottenutasi una formola per un caso, si cercassero le altre pe' casi analoghi, ci limiteremo ad indicare il semplice cambiamento di lettere, che dovrà farsi in quella, per ottener queste.

Scolio.

154. Siccome, dato il seno di un arco, è anche dato il suo coseno; così ciascuna delle tre equazioni del presente Teorema, la quale esprime il rapporto, che v'è tra un lato di un triangolo sferico cogli altri due, e coll' angolo che essi comprendono, non contiene che solamente quattro grandezze indeterminate; e perciò è chiaro, che date tre di queste si potrà determinar la quarta. Così, se sien dati nella prima equazione sen. b, sen c, e cos. A, vale a dire due lati, e l' angolo compreso, si potrà determinare il terzo lato. E se fossero dati i tre lati, e quindi cos. a, cos. b, cos. c, sen. b, sen c, si protrebbero determinar gli angoli. Quì appresso faremo vedere, come per mezzo delle

equazioni suddette, e di quelle de' Coroll. si possano risolvere completamente tutti i casi contenuti ne' num. I. e III. del §. 148.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA.

155. Il coseno di un angolo è uguale al prodotto del coseno del lato opposto, ne' seni degli altri due angoli, toltone il prodotto de' coseni di questi.

Dinotino A', B', C' gli angoli del triangolo supplementale del proposto, ed a', b', c' i lati di esso, sarà

$$\cos.a' = \cos b' \cos c' + \text{sen}.b' \text{ sen}.c' \cos.A' \quad [\ 151.\ ].$$

Ma $\cos.a' = -\cos.A$ [20.]; $\cos b' = -\cos B$;

$\cos.c' = -\cos.C$, $\text{sen}.b' = \text{sen}.B$ [11.]; $\text{sen}.c' = \text{sen}.C$;

$\cos A' = -\cos.a$.

Adunque, fatte queste sostituzioni, e poi multiplicando per -1 il risultamento, si avrà

$$\cos.A = \cos.a \text{ sen}.B \text{ sen}.C - \cos.B \cos.C$$

E cambiando in quest' equazione una volta l' A in B, e l' a in b, ed al contrario; ed un altra volta l' A in C, e l' a in c, ed al contrario, se ne otterranno le altre due analoghe per cos.B, e cos C, cioè

$$\cos.B = \cos.b \text{ sen}.A \text{ sen}.C - \cos.A \cos C$$
$$\cos C = \cos.c \text{ sen } B \text{ sen}.A - \cos.B \cos.A$$

COROLLARIO

156. Se si facciano sull' equazione

$$\cos.A = \cos.a.\text{sen}.B \text{ sen}.C - \cos.B \cos.C$$

le stesse operazioni, che si sono fatte nel Coroll. 1. del Teorema precedente, si otterranno per cot.a le due seguenti espressioni, cioè

$$\cot a = \cot. A \frac{\text{sen } B}{\text{sen.} c} + \cot. c \cos. B$$

$$\cot. a = \cot. A \frac{\text{sen.} C}{\text{sen.} b} + \cot. b \cos. C$$

Nelle quali, praticandovi lo stesso cambiamento di lettere poc' anzi indicato, se ne otterranno due altre analoghe per cot.b, e due altre per cot.c, che sono le seguenti, cioè

$$\cot. b = \cot. B \frac{\text{sen } A}{\text{sen.} c} + \cot. c \cos. A$$

$$\cot. b = \cot. B \frac{\text{sen } C}{\text{sen } a} + \cot. a \cos. C$$

$$\cot. c = \cot. C \frac{\text{sen } B}{\text{sen } a} + \cot. a \cos. B$$

$$\cot. c = \cot. C \frac{\text{sen.} A}{\text{sen.} b} + \cot. b \cos. A$$

e questi valori di cot. a, cot. b, cot. c, si sarebbero anche potuto ottenere, risolvendo, per rapporto a tali quantità, l'equazioni che si sono ottenute ne' numeri 152, e 153, esprimenti i valori di cot. A, cot. B, cot. C.

Scolio.

157. Da ciascuna delle tre equazioni rinvenute nel presente Teorema si rileva, che dandosi in un triangolo sferico due angoli, e 'l lato che gli è adjacente, si può determinare l' angolo opposto a questo. Così per esempio, nella prima di esse, dandosi sen B, sen.C, e quindi cos.B, cos.C, e di più cos.a, si farà noto cos.A E dandosi i tre angoli, si potrà per mezzo di esse determinare ciascuno de' lati. Vale a dire che da questo terzo Teorema restano risoluti gli altri casi compresi ne' num. II. e IV. del §. 148.

CAPITOLO II.

RIDUZIONE DELLE FORMOLE PRECEDENTI, NEL CASO CHE IL TRIANGOLO SFERICO ABBIA UN ANGOLO RETTO.

158. Le formole semplicissime, che si sono ne' precedenti numeri rinvenute, e per mezzo delle quali con facilità risolvonsi i triangoli sferici, come qui appresso faremo vedere, restano agevolmente modificate nel caso, che il triangolo sferico abbia un angolo retto.

Per ottener queste riduzioni, si supponga, che il triangolo sferico ABC [*fig.* 31.] abbia retto l' angolo in A; e quindi che ne sia il lato a l'ipotenusa: egli è chiaro che dovrà in questo caso esser sen. A = 1, e cos. A = 0.

159 Ciò posto, sostituendo 1 per sen. A, nelle prime due analogie recate in fine del n.° 149, esse si ridurranno a queste altre

$$\text{sen}.a : \text{sen}.b :: 1 : \text{sen}.B$$
$$\text{sen}\, a : \text{sen}.c :: 1 : \text{sen}.C$$

Dalle quali si rileva, che: *In ogni triangolo sferico rettangolo, il seno dell' ipotenusa sta al seno di un lato, come il raggio al seno dell' angolo opposto ad un tal lato*

160. Inoltre ponendo o per cos.A nella prima equazione del n.° 151, questa si ridurrà a

$$\cos.a = \cos b \cos.c$$

e quindi si rileverà essere

$$1 : \cos.b :: \cos.c : \cos.a$$

cioè: *Il raggio sta al coseno di un lato, come il coseno dell' altro lato al coseno dell' ipotenusa.*

161. Or le due formole esprimenti cos. B, cos. C rinvenute nel numero 155. riduconsi nel presente caso a

$$\cos.B = \cos.b \ \text{sen}.C$$
$$\cos.C = \cos.c \ \text{sen}.B$$

e queste due equazioni danno le seguenti analogie, cioè

$$1 : \cos.b :: \text{sen}.C : \cos.B$$
$$1 : \cos c :: \text{sen}.B : \cos.C$$

ciascuna delle quali indica, che: *Il raggio sta al coseno di un lato, come il seno dell' angolo adjacente al coseno dell'angolo opposto.*

162. Ponendo $\cos.A = 0$ nella prima equazione del n.° 155, essa diverrà

$$\cos.a \ \text{sen}.B \ \text{sen}.C - \cos.B \ \cos.C = 0$$

che risolnta per rapporto a $\cos.a$, dà

$$\cos.a = \frac{\cos.B}{\text{sen}.B} = \frac{\cos.C}{\text{sen}.C}$$

e quindi $\cos.a = \text{tang}.B = \cot.C$

o pure $\cos.a = \text{tang}.C = \cot.B$

le quali due equazioni si ottengono dividendo la precedente, una volta per lo primo fattore del secondo membro di essa, ed un'altra volta per lo secondo: e poi praticando le ovvie riduzioni. Finalmente da tali equazioni se ne ricaveranno le seguenti due analogie

$$1 : \cos.a :: \text{tang}.B : \cot.C$$
$$1 : \cos.a :: \text{tang}.C : \cot.B$$

ciascuna delle quali dà luogo al seguente Teorema: *Il raggio sta al coseno dell' ipotenusa, come la tangente di un angolo alla cotangente dell' altro.*

163. Siccome essendo l' angolo A di 90°, il suo complemento è zero, così $\cot.A = 0$; il qual valore sostituito nelle due espressioni di $\cot.a$ recate nel n.° 156, darà

$$\cot.a = \cot.c \ \cos.B$$
$$\cot.a = \cot.b \ \cos.C$$

da'le quali due equazioni si ricaveranno le seguenti analogie

$$1 : \cos B :: \cot c : \cot.a, \text{ cioè} :: \text{tang } a : \text{tang } c$$
$$1 : \cos C :: \cot b : \cot a, \text{ cioè} :: \text{tang } a : \text{tang } b$$

Le quali indicano, che: *Il raggio sta al coseno di un angolo, come la tangente dell' ipotenusa a quella del lato adjacente ad un tal angolo.*

164. Finalmente ponendo sen.A=1, e cos.A=0 in que'valori di cot b, cot.c del numero 156, ne' quali si contengono le suddette linee trigonometriche dell' angolo A, essi si ridurranno a' seguenti, cioè

$$\text{cot. } b = \frac{\text{cot. B}}{\text{sen. } c}$$

$$\text{cot. } c = \frac{\text{cot. C}}{\text{sen. } b}$$

e quindi sarà

1 : sen.c :: cot.b : cot B, o sia :: tang.B : tang b

1 : sen b :: cot.c : cot.C, o sia :: tang.C : tang.c

dalle quali due analogie si ha poi permutando

1 : tang.B :: sen.c : tang.b

1 : tang.C :: sen.b : tang.c

cioè: *Il raggio sta alla tangente di un angolo, come il seno del lato adjacente ad esso alla tangente del lato che gli è opposto.*

COROLLARIO I.

165. Essendosi dimostrato nella prima analogia del precedente numero, che stia 1 : tang. B :: sen c : tang b, siccome sen.c è sempre dello stesso segno del primo termine di questa proporzione, il qual rappresenta il seno massimo, così dovrà pure tang. B essere del segno stesso di tang.b. E similmente, rilevandosi dalla seconda di esse, che tang C debba sempre essere del segno stesso di tang c, se ne potrà conchiudere, che: *Ne' triangoli sferici rettangoli, ciascun lato è della stessa specie dell' angolo, che gli è opposto*; cioè che il numero de' gradi per ciascun di essi è o minore di 90°, o pur maggiore.

COROLLARIO II.

166. Inoltre nella stess'analogia, essendo 1 > sen c, dovrà essere anche tang B > tang.b. Quindi se mai i segni di queste tangenti sieno positivi, cioè, che B, b sieno archi ciascuna

minore di 90°, sarà $B > b$; se poi saranno negativi, e perciò B, e b ciascuno maggiore di 90°, sarà $B < b$. E verificandosi lo stesso per gli archi C, c; sarà vero, che: *Ne' triangoli sferici rettangoli, ogni angolo obbliquo non può mai esser minore, se acuto, maggiore, se ottuso, del lato che gli è opposto.*

Scolio.

167. Le formole di riduzione de' numeri 159, 160, 161, 162, 163, 164, che abbiamo espresse anche in forma enunciativa, per renderle più ritenevoli, ed anche per mostrare la loro corrispondenza co' Teoremi di Trigonometria Sferica, che nelle ordinarie istituzioni di questa scienza si propongono, sono sufficienti, come tra poco si vedrà, alla completa, e facile risoluzione de' triangoli sferici rettangoli.

CAPITOLO III.

APPLICAZIONE DE' PRINCIPJ STABILITI NE' DUE PRECEDENTI CAPITOLI ALL' EFFETTIVA RISOLUZIONE DE' TRIANGOLI SFERICI.

168. Le parti di un triangolo sferico possono in modo combinarsi tre a tre, come si è veduto nel numero 148, che ne risultino sei casi assolutamente diversi, alla risoluzione de' quali sono sufficienti que' principj, che dal §. 149. in poi abbiamo stabiliti, come passeremo a mostrare ne' seguenti §§. Intanto per serbare, per quanto si può, l' uniformità di questo Trattato con quello di Trigonometria Rettilinea, ed anche per proceder gradatamente, incominceremo dalla

RISOLUZIONE DE' TRIANGOLI SFERICI RETTANGOLI.

169. Se un triangolo sferico EAF avesse retti i due angoli sferici in E, F; dovrebbero i piani de' cerchi ADB, AFB esser perpendicolari a quello del cerchio HEFK, al quale sarebbe per conseguenza anche perpendicolare la comune sezione BA di que' primi cerchi. Laonde il punto A, essendo il polo del cerchio HEFK, gli archi AE, AF, che sono que' lati del triangolo sferico proposto, i quali sottendono i suoi due angoli retti, dovranno esser ciascuno di 90°: ed al contrario si vede chiaramente, che se i lati AE, AF del triangolo sferico EAF fossero ciascuno di 90°, gli angoli in E, F di tal triangolo, opposti a que' lati, dovrebbero esser retti. Adunque in un triangolo sferico, che ha due angoli retti, il valore de' lati opposti a questi si ha per la natura stessa di tal triangolo. Ma poichè di queste quattro cose date, due si hanno per immediata conseguenza dalle altre due; perciò non sono in realtà che due soli dati, e quindi non si potrà da esse risolvere un tal triango-

lo, cioè determinare il rimanente angolo, ed il lato che gli è opposto; tanto più, che come facilmente s'intende, questi dati possono appartenersi non solamente al triangolo EAF, ma ad ogni altro DAF, CAF, *ec.*, ne' quali il rimanente angolo, ed il lato opposto ad esso si variano continuamente. Quello che solamente si sa, è, che il terzo lato, ed il terzo angolo sono uguali tra loro, sicchè dato l'uno si ha anche l'altro: che perciò se il terzo angolo EAF si fosse supposto anche retto, il lato EF sarebbe pure di 90°. Vale a dire, che un triangolo sferico, che ha tre angoli retti ha tutti i tre lati di 90°, e quindi resta da se stesso risoluto. Adunque non ci resta a considerare pel nostro oggetto, che solamente quei triangoli sferici rettangoli, che hanno un solo angolo retto; il che eseguiremo nel seguente Problema.

PROPOSIZIONE IV.

Problema.

170. In un triangolo sferico rettangolo, date due delle sue parti, oltre l'angolo retto; determinare le rimanenti.

Caso I.

Sien dati i cateti CA, AB [*fig.* 31.] [b, c], e si cerchi l'ipotenusa, e gli altri due angoli:

1.° L'ipotenusa BC [a] resterà determinata per mezzo dell'equazione

$$\cos.a = \cos.b \cos c \quad [160]$$

dalla quale si farà noto cos.a, e l'arco a apparirà dalle Tavole. Se però cos.a risulti negativo, un tal arco sarà il supplemento di quello, che nelle Tavole si sarà rinvenuto [20].

2°. L'angolo B, e l'altro C si avranno poi mediante le due seguenti equazioni analoghe, l'un l'altra, ricavate dalle due analoghe, anche tra loro, del n°. 164.

$$\text{tang. B} = \frac{\text{tang } b}{\text{sen. } c} \qquad \text{tang. C} = \frac{\text{tang. } c}{\text{sen. } b}$$

CASO II.

Che se diasi un cateto AC [a], e l'ipotenusa BC [b]; e si cerchi l'altro cateto AB, e ciascun degli angoli B, C alla base.

1.° Il cateto AB [c] resta determinato dall'equazione

$$\cos. c = \frac{\cos. a}{\cos. b} \text{ [160.]}$$

2.° L'angolo obbliquo C adjacente al lato dato resta determinato dall' equazione

$$\cos. C = \frac{\text{tang}. b}{\text{tang}. a} \text{ [168.]}$$

3.° E l'altro angolo acuto B, che gli è opposto, si otterrà per mezzo dell' equazione

$$\text{sen}. B = \frac{\text{sen}. b}{\text{sen}. a} \text{ [159.]}$$

La specie di un tal angolo non sarà dubbia, sebbene espressa dal seno; poichè è la stessa di quella del lato AC, che gli è opposto [166.].

CASO III.

E dandosi l'ipotenusa BC [a], ed un degli angoli obbliqui B.

1°. Il lato BC [b] opposto a quest' angolo si otterrà per mezzo dell' equazione

$$\text{sen}. b = \text{sen}. a \ \text{sen}. B \text{ [159.]}$$

Nè la specie di un tal lato sarà dubbia.

2°. L'altro lato AB [c] adjacente all'angolo B resta determinato dall'equazione

$$\text{tang}. c = \cos. B \ \text{tang}. A \text{ [163.]}$$

3°. Finalmente il rimanente angolo C vien determinato dall' equazione

$$\cot. C = \cos. a \ \text{tang}. B \text{ [162]}$$

Caso IV.

Che se diasi un lato AC [b], e l'angolo C che gli è adjacente.

1°. Si avrà l'ipotenusa BC [a] per mezzo dell'equazione

$$\text{tang.}\, a = \frac{\text{tang.}\, b}{\cos.\, C} \quad [163.]$$

2°. L'altro cateto AB [c] si avrà dall'equazione

$$\text{tang.}\, c = \text{tang.}\, C \ \text{sen.}\, b \quad [164.]$$

3°. Finalmente per avere il rimanente angolo B, si dovrà far uso dell'equazione

$$\cos.B = \text{sen.}C \ \cos.b \quad [161.]$$

Caso V.

Se poi diansi il lato AC [b], e l'angolo B che gli è opposto.

1°. L'ipotenusa BC [a] si avrà col fare

$$\text{sen.}\, a = \frac{\text{sen.}\, b}{\text{sen.}B} \quad [159.]$$

2°. L'altro cateto AB [c] si avrà per mezzo dell'equazione

$$\text{sen.}\, c = \frac{\text{tang.}\, b}{\text{tang.}B} \quad [164]$$

3°. Ed il rimanente angolo C si otterrà dall'equazione

$$\text{sen.}C = \frac{\cos.B}{\cos.\, b} \quad [161.]$$

Questo caso è *dubbio*; poichè è chiaro, che prolungandosi i lati BC, BA [*fig.* 32.] del proposto triangolo sferico, finchè s'incontrino in D; l'angolo B sarà uguale all'altro D [127] che perciò gli stessi dati si apparterranno sì al triangolo sferico BAC, che all'altro DAC. Laonde non si potrà mai venire in cognizione se l'ipotenusa del triangolo che si risolve, sia l'arco BC minore di un quadrante, o pur l'altro DC, che n'è il supplemento: e similmente non potrà determinarsi, se l'altro lato e l'angolo ignoti sieno BA e BDA, o pure i loro supplementi

rispettivi DA, e DCA, a meno che le circostanze della quistione non tolgano quest' incertezza.

CASO VI.

Finalmente se sien dati gli altri due angoli B, C

1. L' ipotenusa BC [a], si avrà dall' equazione

$$\cos.a = \frac{\text{cot. C}}{\text{tang.B}} \quad [162.]$$

2. L'un de' cateti AB [c] si rinverrà facendo

$$\cos.c = \frac{\text{cos. C}}{\text{sen. B}} \quad [161]$$

e l' altro AC [b] con farsi similmente

$$\cos.b = \frac{\text{cos.B}}{\text{sen.C}}$$

Ed ecco risoluti tutti i casi de' triangoli sferici rettangoli—*C.B.F.*

RISOLUZIONE DE' TRIANGOLI SFERICI OBBLIQUANGOLI.

PROPOSIZIONE. V.

PROBLEMA.

171. In un triangolo sferico obbliquangolo, date tre delle sue parti; determinare le rimanenti.

CASO I.

Sien dati in primo luogo i tre lati BC, CA, AB [*fig.*33.] [a, b, c], e si cerchino gli angoli A, B, C. L'equazione

$$\cos.a = \cos.b \cos.c + \text{sen}.b \text{ sen}.c \cos.A \quad [155.]$$

darà. . . . . $\cos.A = \dfrac{\cos.a - \cos.b \cos.c}{\text{sen}.b \text{ sen}.c}$

Onde si avrà il coseno dell' angolo A; e quindi quest' angolo. E similmente si determineranno gli altri, risolvendo cioè, le due altre equazioni del n.° 151, per determinare cos B, e cos.C. Ed è chiaro, che in questo caso non resti dubbio sulla specie di ciascuno degli angoli; poichè essendo essi esibiti da' coseni, la specie loro resterà fissata dal segno di questi. E lo stesso può dirsi de' tre seguenti casi.

Caso II.

In secondo luogo sieno dati i tre angoli A, B, C, e si cerchino i lati BC, CA, AB, [a, b, c,].

Si avrà il lato BC [a] per mezzo dell' equazione

$$\cos A = \text{sen.}B\ \text{sen.}C \cos a - \cos.B \cos.C \quad [155.]$$

dalla quale si ricava

$$\cos.\ a = \frac{\cos A + \cos.B \cos C}{\text{sen}\ B\ \text{sen.}C}$$

E per mezzo delle corrispondenti equazioni

$$\cos.\ b = \frac{\cos B + \cos A \cos C}{\text{sen.}A\ \text{sen}\ C}$$

$$\cos.\ c = \frac{\cos.C + \cos B \cos A}{\text{sen.}B\ \text{sen.}A}$$

si determineranno gli altri due lati AB, AC [b, c].

Caso III.

Che se diensi due lati AC, AB [b, c], e l' angolo A da essi compreso; si determinerà il terzo lato BC [a], per mezzo dell' equazione

$$\cos a = \cos b \cos c + \text{sen}\ b\ \text{sen}\ c \cos A \quad [151.]$$

Ed il triangolo si terminerà di risolvere come nel Caso I. E se vogliansi ottenere i rimanenti angoli B, C senza prima determinare il lato BC [a]; si adopreranno le seguenti equazioni

$$\cot B = \cot.b \frac{\text{sen}\ c}{\text{sen.}A} - \cos.c \cot.A$$

$$\cot.C = \cot c \frac{\text{sen}.b}{\text{sen}.A} - \cos.b \cot.A$$

CASO IV.

E dandosi due angoli B, C, ed il lato BC [a], che gli è adjacente. Si avrà il terzo angolo A per mezzo dell'equazione

$$\cos.A = \text{sen}.B \text{ sen}.C \cos.a - \cos.B \cos.C \quad [155.]$$

E le rimanenti parti del triangolo si otterranno come nel Caso II. Che se queste vogliansi indipendentemente dalla determinazione dell'angolo A, bisognerà cercarle per mezzo dell' equazioni

$$\cot.b = \cot.B \frac{\text{sen}.C}{\text{sen}.a} + \cos.C \cot.a \quad [156.]$$

$$\cot.c = \cot.C \frac{\text{sen}.B}{\text{sen}.a} + \cos B \cot.a$$

CASO V.

In quinto luogo le parti date del triangolo sieno i due lati AC, AB [b, c], e l'angolo B opposto all' un di essi.

1°. Per aver l'angolo C, che sta opposto all'altro lato, bisognerà servirsi dell' equazione

$$\text{sen}.C = \frac{\text{sen}.B \text{ sen}.c}{\text{sen}\, b} \quad [150.]$$

È chiaro, che in questo caso la specie dell' angolo C sarà *dubbia*: un tal angolo C sarà però sempre maggiore dell' altro B, nel caso che si sappia, che il lato c sia maggiore di b; ed al contrario [145.].

2.° Il terzo lato CB [a] si avrà pareggiando tra loro i due valori di cot.A, che si sono ottenuti nel n.° 152; e determinando per mezzo di quest'equazione il valore di cot.a.

3.° Finalmente il rimanente angolo A, o si determinerà per mezzo del n°. 149, o pure, se vogliasi determinare indipenden-

temente dal lato BC [a], bisognerà cercarlo maneggiando l'equazione che risulta dal pareggiamento de' valori di cot. a, ottenut nel n.° 156.

Caso VI.

Sien dati finalmente due angoli B, C, e 'l lato AB [b] opposto all'un di essi.

Per avere il lato AB [c] opposto all'altro angolo, si farà uso dell'equazione

$$\text{sen.}c = \frac{\text{sen.}b \text{ sen C}}{\text{sen.B}} \quad [150.]$$

Ed il terzo angolo A, ed il lato BC [c], che gli è opposto, si potranno determinare come nel Caso precedente. Le parti del triangolo dimandate in questo caso, sono *dubbie*, come nel precedente.

Adunque si è soddisfatto a quello che dimandavasi nel presente Problema.—*C.B.F.*

CAPITOLO IV.

DI ALCUNI TRIANGOLI SFERICI LA CUI RISOLUZIONE DIPENDE DA QUELLA DE' TRIANGOLI SFERICI RETTANGOLI.

PROPOSIZIONE VI.

PROBLEMA.

172. Risolvere un triangolo sferico, quando tra le tre parti date di esso vi sia un lato di 90°.

Sia ABC [*fig.* 27.] un triangolo sferico, e BC il suo lato di 90°. E poichè descritto il triangolo supplementale DFE, l'angolo F dee anche essere di 90.°; perciò questo triangolo supplementale sarà rettangolo: ed inoltre saranno date in un tal triangolo DEF quelle altre due sue parti, che sono i supplementi rispettivi delle parti date nel triangolo BAC [133.]. Laonde il triangolo DFE potrà risolversi [170.]: e determinate che si saranno le sue rimanenti parti, resteranno anche determinate le loro corrispondenti nel triangolo BAC, cioè quelle che ne sono i rispettivi supplementi: che perciò si sarà risoluto il triangolo BAC.

SCOLIO.

173. Il triangolo sferico ABC, che ha un lato di 90°, da taluni trigonometri moderni suol chiamarsi *rettilatero*.

PROPOSIZIONE VII.

PROBLEMA.

174. Risolvere un triangolo sferico isoscele.

Abbia il triangolo sferico BAC [*fig.* 29.] i lati BA, AC uguali, e dal vertice A si conduca al punto medio D del lato opposto BC l'arco di cerchio massimo AD, il quale dividerà il triangolo BAC in due triangoli rettangoli; ed è chiaro, che la risoluzione del triangolo BAC si ridurrà a quella di uno di questi triangoli rettangoli.

PROPOSIZIONE VIII.

PROBLEMA.

175. Risolvere un triangolo sferico in cui due lati sieno supplementi l'uno dell'altro.

Sia BAC [*fig.* 24.] il triangolo sferico proposto, in cui i lati AB, AC sieno supplementi l'uno dell'altro. Si prolunghi l'uno di questi due lati AB, finchè s'incontri in D col terzo lato BC: sarà AD uguale ad AC, e quindi il triangolo CAD essendo isoscele si potrà risolvere come nel Problema precedente. Ma i triangoli BAC, ADC sono in modo connessi, che dalle parti dell'un triangolo sono sempre determinabili quelle dell'altro, giacchè i lati AB, BC dell'uno sono supplementi de'lati AD, DC dell'altro, il lato AC è comune, gli angoli in B, D sono uguali, e gli angoli BAC, BCA sono supplementi degli angoli DAC, DCA. Adunque la risoluzione del triangolo BAC dipende da quella del triangolo isoscele ADC.

SCOLIO.

176 É facile il vedere, che nel triangolo proposto ABC debba esser anche l'angolo ABC supplemento dell'angolo BCA. Poichè, essendo l'angolo ACB supplemento dell'altro ACD, lo sarà anche dell'angolo in D, ch'è uguale all'angolo ACD [142.], e quindi dell'altro in B, ch'è uguale a quello in D [127.].

CAPITOLO V.

Ricerche geometriche intorno a' casi dubbj nella risoluzione de' triangoli sferici.

177. Le presenti ricerche hanno per oggetto il mostrare geometricamente, come possano aver luogo i casi dubbj de' quali si è detto ne' num. V. e VI della Prop. V., o sia in qual modo si verifichi che cogli stessi dati, cioè due lati ed un angolo opposto ad un di essi, o due angoli ed un lato opposto, possansi costruire due triangoli sferici diversi: ed entreremo a tal proposito ad esaminare, per quali valori particolari de' lati la quistione resti dubbia, e per quali altri non lo sia. Finalmente cercheremo di restringere, per mezzo di alcune regole, al più ch' é possibile, la dubbiezza di tali casi.

178. Sia l' angolo sferico BAC [*fig.* 35.], i cui lati BA, AC si prolunghino finchè s' incontrino in A′: e suppongasi primieramente l' angolo in A, o il suo uguale in A′ esser minore del retto, cioè minore di 90°. Inoltre prendasi l' arco AB minore del quadrante, e dal punto B si abbassi sopra di ACA′ l' arco perpendicolare BD: egli è chiaro, che prendendo a destra ed a sinistra del punto D, gli archi uguali D*c*, DC, gli archi di cerchi massimi B*c*, BC sieno anche uguali; ed inoltre che l' angolo sferico B*c*A sia supplemento dell' altro BCA. Imperocchè gli angoli B*c*A, B*c*A′ sono uguali a due retti, del pari che gli altri BCA, BCA′, e di essi l' angolo B*c*C è uguale all' altro BC*c*; quindi dovrà il rimanente angolo B*c*A essere uguale al rimanente BCA′: che perciò l' angolo B*c*A, del pari che l' altro BCA′, sarà supplemento dell' angolo BCA. Adunque essendo dati l' angolo A, e gli archi, *a*, ch' è il lato opposto a quell' angolo, e *c* ch' è il lato adjacente, s' ignorerà se si risolva il triangolo BAC, o pur l' altro BA*c*. Ciò però ha un limite; perchè se CB si faccia uguale a BA, diverrà un solo il triango-

lo da risolversi, e la sua risoluzione rientrerà nel metodo esposto al n.° 174. E divenendo CB > BA, l'arco BE uguale a BC dovrebbe incontrare l'arco AC al di là del punto A: ond'è, che co' dati proposti non potrebbe ottenersi che il solo triangolo BAC, mentre l'altro BAE non ha più per un de' dati l'angolo EAC, ma il suo supplemento BAE.

E supponendo l'arco AB′ [c] maggiore di un quadrante, cioè di 90°; ed abbassando da B′ sull'arco ACA′ la perpendicolare B′D′, si vede similmente, che per ogni due punti C′, c' equidistanti da D′, presi sull'arco ACA′ vi corrispondano archi uguali B′C′, B′c'; e che gli angoli B′C′A, B′c'A sieno supplementi l'uno dell'altro: sicchè essendo dati l'angolo in A, ed i lati B′C′, [a], e B′A [c], la formola che dà l'angolo opposto al lato c ci lascerà nel dubbio, se siasi ottenuto l'angolo in C′, o il suo supplemento in c'. Ciò non avverrà però se l'arco B′C′ si faccia uguale a B′A′, cioè quanto il supplemento di AB′: imperocchè in tal caso non vi esisterà, che il solo triangolo B′AC′ che possa costruirsi con que' dati; e quindi il problema sarà suscettivo di una sola soluzione. Nè tampoco vi sarà caso dubbio se B′C′ divenghi maggiore di B′A′: poichè in questo caso l'arco B′E′ uguale a B′C′, cadendo col suo estremo E′ al di là del punto A′, non si potrà costruire più co' dati del problema che il solo triangolo sferico B′AC′. Vale a dire, che non vi sarà caso dubbio se C′B′+B′A′, cioè $a+c$ sia uguale, o maggiore di AB′A′, o sia di 180°.

179. In secondo luogo suppongasi che l'angolo sferico in A [*fig.* 36.] sia ottuso, cioè maggiore di 90°. Si prolunghino similmente i lati AB, AC finchè s'incontrino in A′, e supposto che AB sia minore di un quadrante, dal punto B si abbassi sull'altro lato AC l'arco perpendicolare BD, che cadrà dalla parte dell'angolo conseguente del dato CAB. Ciò posto, se prendansi a destra e sinistra del punto D, e nella circonferenza ACD, de' punti c, C equidistanti da D, è egli chiaro, che gli archi di cerchio massimo che passano per quelli punti presi, e per B sieno uguali. Ma allorchè gli archi uguali DAC, DA′c sono tali, che DA′c è maggiore di DA′, il punto C e l'altro c

vengono a cadere nella stessa circonferenza ACA′, e gli archi BC, Bc vengono perciò a sottendere lo stesso angolo BAC dato. Laonde è chiaro, che in tal caso cogli stessi dati, cioè l' angolo BAC, lato c adjacente, e lato opposto a si potranno costituire due triangoli sferici diversi ABC, ABc, ne' quali l'angolo ignoto ACB dell' uno, ch'è opposto al lato c, è il supplemento dell' angolo ignoto AcB dell' altro, ch' è opposto al lato stesso. Or perchè in tal caso l'arco Bc è più distante dall' arco perpendicolare BD, che l'altro BA′; perciò quello sarà maggiore di questo, e quindi AB+Bc, o AB+BC sarà maggiore di ABA′, cioè di 180°: che perciò si vede, che un triangolo sferico, ove un angolo dato sia maggiore di 90°, il lato adjacente anche dato sia minore di 90°; e la somma di esso e del lato opposto ch' è pur dato, sia maggiore di 180°, ha due soluzioni: e non sarebbe suscettivo che di una sola soluzione, se la somma di tali lati fosse meno di 180°, o pur 180°.

Che se l'arco AB′ [*fig.* 37.] si fosse supposto maggiore di 90°: abbassando similmente dal punto B′ sulla circonferenza AC′A′ l' arco perpendicolare B′D′, e prendendo a destra e sinistra del punto D′ nella circonferenza stessa, gli archi uguali D′A′c′, D′A′C′; allora si verrebbero a costituire due triangoli sferici cogli stessi dati, quando i due punti C′, c′ cadrebbero nella stessa semicirconferenza AC′A′. Or in un tal caso ciascun degli archi B′C′, B′c′, come più distante dell' altro B′A dall' arco perpendicolare B′D′, dovrà esser maggiore di B′A; vale a dire, co' dati stessi A, c, a il problema avrà due soluzioni se $c < a$, e ne avrebbe una sola, se $c > a$, o $c = a$.

180. E sarà facile il vedere, che in ciascuno de' due casi esaminati, cioè di A < 90°, e di A > 90°, se l'arco AB sia di 90° il problema avrà sempre due soluzioni, eccetto il caso, che l'arco a sia dello stesso numero di gradi e minuti che l' angolo opposto A, nel qual caso il triangolo proposto è un solo, ed è birettangolo, nè ha bisogno di risoluzione, essendovi tutto già noto.

181. Finalmente se l' angolo A suppongasi di 90°, è chiaro, che il problema non possa avere co' dati A, c, a, che una

sola soluzione, qualunque si supponga essere il valore particolare di c, e qualunque il suo rapporto con a; il che coincide con ciò che si disse al n.° 3. Cas. II., ed al n.° 1. Cas. III. della Prop. IV [170.].

182. Dietro queste considerazioni si potrebbe stabilire una tavola per conoscere quando co' dati A, a, c, la specie del triangolo sferico sia dubbia, e quando non lo sia: e da una tal tavola se ne potrebbe poi rilevare, per mezzo del triangolo supplementale, un'altra, per conoscere quando co' dati a, A, C la specie del triangolo è dubbia, e quando non lo è. Un tal espediente è stato di fatti proposto, per conoscere i casi effettivamente dubbj, da alcuni analisti Francesi seguendo il Bertrand, che il primo lo adottò (*Développement nouveau de la partie élémentaire de Mathématiques tom. 2. sect. V.*); ma sarà meglio di quì recare a quest' oggetto le seguenti regole, le quali rendono tal teorica assai più determinata, più breve e comoda per la memoria.

183. *I. L' angolo opposto al lato minore è acuto, se la somma de' lati dati è minore di* 180.°

E al contrario: *il lato opposto all' angolo minore è acuto, se la somma degli angoli dati è minore di* 180°.

Il che si rileva chiaramente dalla Propos. XIV. Lib. III.

184. *II. L' angolo opposto al lato maggiore è ottuso, se la somma de' lati dati sia maggiore di* 180°. Ed al contrario.

E ciò è una conseguenza manifesta della stessa proposizione.

185. *III. Quando la somma de' lati dati è uguale a* 180°, *anche la somma degli angoli opposti è uguale a* 180°. Ed al contrario.

Il che ecco in qual modo si dimostra

Poichè $\cos.B \text{ sen.} a = \frac{\cos.b - \cos a \cos c}{\text{sen.} c}$ [151.], sostituendo in quest' equazione il valore di $\cos.a$ preso dal numero 151, e poi riducendo, col porre $1 - \text{sen.}^2 c$ per $\cos.^2 c$ [35.], si avrà

$$\cos.B \text{ sen.} a = \cos.b \text{ sen.} c - \cos.A \text{ sen.} b \cos.c$$

e per simmetria dovrà parimente essere

$$\cos.C \text{ sen.} a = \cos.c \text{ sen.} b - \cos.A \text{ sen.} c \cos.b$$

che perciò sommando queste due equazioni, e poi riducendo il risultamento, col sostituire sen.($b+c$) in luogo di sen.b cos.c $+$cos b sen.c [45.], sarà

M . . sen a (cos.B$+$cos.C)$=$(1$-$cos. A) sen ($b+c$)

$$\text{Ma è poi sen B} = \frac{\text{sen A sen. } b}{\text{sen } a} \text{ [150]}$$

$$\text{sen. C} = \frac{\text{sen. A sen } c}{\text{sen. } a}$$

e quindi sen a (sen.B$+$sen.C) $=$ sen.A (sen.$b$$+$sen c);

Laonde dividendo quest' equazione per l'altra M, si avrà

$$\frac{\text{sen.B}+\text{sen.C}}{\text{cos B}+\text{cos C}} = \frac{\text{sen A}}{1-\text{cos. A}} \times \frac{\text{sen } b + \text{sen.} c.}{\text{sen.}(b+c)}$$

nella quale, se sostituiscasi al primo membro tang $\frac{B+C}{2}$ [63 IX] e pongasi in luogo del secondo membro cot.$\frac{A}{2}$ $\times$ $\frac{\cos. \frac{1}{2}(b-c)}{\cos. \frac{1}{2}(b+c)}$ [59, e 66. XIII.], essa si ridurrà all'altra

$$\text{tang. } \frac{B+C}{2} = \text{cot } \frac{A}{2} \times \frac{\cos \frac{1}{2}(b+c)}{\cos \frac{1}{2}(b-c)}$$

Or siccome in quest'ultima equazione cot.$\frac{A}{2}$, e cos. $\frac{b-c}{2}$ debbono essere sempre del segno stesso; si vede perciò chiaramente, che debbano anche risultar del segno stesso tang. $\frac{B+C}{2}$, e cos.$\frac{b+c}{2}$ cioè, che: *la metà della somma di due angoli di un triangolo sferico, e la semisomma de'lati ad essi opposti sono della medesima specie.* Dal che chiaramente risulta la terza regola quassù enunciata.

186. Dopo tutte queste ricerche, se la specie del triangolo resterà dubbia per una delle sue parti, cioè che, dati A, a, c non si conosca la specie di C, o dati a, A, C non si sappia la specie di c, resterà anche dubbia la specie delle rimanenti parti del triangolo, come si rileva facilmente.

CAPITOLO VI.

REGOLE NEPERIANE, E LORO USO VANTAGGIOSO NELLA RISOLUZIONE DE' TRIANGOLI SFERICI.

187. Nel principio del XVII° secolo faustissimo per le matematiche, il barone Scozzese Giovanni Nepero, il cui nome sarà immortale, finchè si coltiveranno le scienze esatte, per la sublime ed utilissima invenzione de' logaritmi, stabilì anche alcuni nuovi metodi di risoluzione immaginati da lui, per render più semplice la pratica della Trigonometria sferica (*). Nè le nuove ricerche analitiche fatte posteriormente da sommi Geometri moderni, nè l'eleganza e la facilità che presentano per la risoluzione de' triangoli sferici le formole Euleriane da noi rapportate, ed applicate a quest' oggetto nelle Propp. IV. e V. del presente Libro, possono farci tralasciare di quì recar le Regole Neperiane. Questo sì, che noi non le esporremo nella maniera tenuta dal loro inventore; ma le dedurremo da' principj stessi da noi stabiliti, ed in quel modo che ci è sembrato più convenevole. Che anzi è da avvertirsi, che le nostre enunciazioni della seconda e terza regola pajono differenti da quella del Nepero, per esservisi da noi introdotto il doppio del logaritmo del raggio, come convenivasi fare, mentre nelle Tavole logaritmiche, che oggigiorno si hanno per le mani de' calcolatori, il logaritmo del raggio ponsi uguale a 10,0000000, e non già a zero, come il suppose il Nepero, prendendo effettivamente l'unità per raggio; dal che nasceva che quel logaritmo non doveva comparire nel calcolo.

188. Ed al proposito della traduzione delle formole trigono-

(*) Veggasi anche a questo proposito quanto è stato detto nel Discorso Preliminare.

metriche delle quali finora si è trattato nelle due Trigonometrie, da algebriche in logaritmiche, conviene avvertire, che v'è bisogno in far questo passaggio della prudenza del calcolatore. Imperocchè siccome nel determinarle si è sempre supposto il raggio = 1, sicchè questo fattore, che in molte di esse implicitamente si contiene, non si ravvisa di fatto; e che, come si è già detto, il logaritmo del raggio nelle ordinarie Tavole de' seni, non più, alla maniera di Nepero, vien posto = 0, ma sì bene = a 10,0000000, così convenendo tenerne conto, bisognerà prima apparecchiarsi la formola algebrica sulla quale si dee operare per la risoluzione di un dato caso; e la regola già nota a coloro che sono appena iniziati ne' principj di Geometria analitica si è, d' introdurre in tal formola tante volte per moltiplicatore o divisore il raggio, quante volte bisogna, perchè vi sia l' omogeneità di dimensioni ne' termini di essa. Così, per esempio, a fin di usare della formola del §. 151. in logaritmi, bisognerebbe porla sotto quest' altra forma, cioè

$$\cos.a\, R' = \cos.b \cos c.\, R + \text{sen}.b\, \text{sen}.c \cos.A$$

rendendo ciascun termine di tre dimensioni, come lo era l' ultimo. Senza questa precauzione il risultamento del calcolo logaritmico applicato ad una tal formola sarebbe erroneo, e condurrebbe a conseguenze fallacissime e paradosse. E taluno si potrebbe facilmente assicurare, che sia questa la vera forma di quell' espressione, e così di ogni altra, se ripigli il ragionamento che si è fatto nella Prop. II. Lib. IV., per rinvenirla, supponendo il raggio espresso da R, e non da 1.

189. Avvertite queste cose, per l' esatta applicazione del calcolo logaritmo al maneggio delle formole rinvenute per la risoluzione de' triangoli sferici, è anche necessario, prima di venire ad esporre la prima delle Regole Neperiane, il definire alcune voci delle quali il Nepero si è servito.

190 *Def.* 11. Chiamansi *parti circolari* in un triangolo sferico rettangolo i lati che comprendono l' angolo retto, ed i complementi dell' ipotenusa e di ciascuno degli angoli adjacenti ad essa.

Così nel triangolo sferico BAC rettangolo in A si dicono

parti circolari i lati CA, AB [*b*, *c*], ed i complementi di CB [*a*], di B, e di C.

SCOLIO.

191. Distinguonsi queste parti circolari, secondo il Nepero, in tre specie: e chiamando *media* una di esse ad arbitrio, si chiameranno *estreme adjacenti* quelle altre due, che sono adjacenti alla media prefissa; ed *estreme opposte* quelle al contrario, che gli sono opposte. Così prendendo per parte media *comp*.B[*fig*.31.]; le estreme adjacenti saranno il lato AB [*c*] e *comp*.BC [comp. *a*]; e le estreme opposte *comp*.C, ed AC [*b*] Ed al contrario, prendendo per parte media *comp*.C, le estreme adjacenti sarebbero AC [*b*], e *comp*.CB [comp. *a*]; e le estreme opposte, *comp*.B, ed AB [*c*]. In 2.° luogo, prendendo per parte media *comp*.BC [compl. *a*], le parti estreme adjacenti saranno *comp*.B, e *comp*.C; ed AB, AC [*c*, *b*] le estreme opposte. In 3.° luogo, presa per parte media il lato AB [*c*], le estreme adjacenti saranno *comp*.B, ed AC [*b*], (poichè l'angolo retto in A non intercetta adjacenza, non essendo parte circolare); e le estreme opposte sono *comp*.C, e *comp*.BC [comp. *a*]. E così pure, presa per parte media il lato AC [*b*], le estreme adjacenti saranno *comp*.C, ed AB [*c*]; e le estreme opposte *comp*.B, e *comp*.BC [comp. *a*].

192. Intanto prima di passare ad esporre le Regole Neperiane delle quali si è detto, avvertiremo, che esse da noi si sono ridotte a cinque, delle quali la prima, ch'è distinta in due parti, comprende i sei Teoremi dimostrati dal numero 159 al 164. compendiati, e connessi insieme; il che veramente non rende più semplice la risoluzione de' triangoli sferici rettangoli alla quale sono destinati i suddetti teoremi; ma bensì più facili e ritenevoli i principj su i quali essa è fondata: e le rimanenti quattro espongono in formole logaritmiche i principj per la risoluzione de' triangoli sferici obbliquangoli; e ciò gli rende assai più eleganti e facili a maneggiarsi nella pratica risoluzione di questi triangoli.

REGOLA I.

193. In un triangolo sferico rettangolo, il seno di ciascuna parte media è uguale: 1° al prodotto delle tangenti delle parti adjacenti: 2° o al prodotto de' coseni delle parti estreme opposte.

La verità di questa regola si rileverà facilmente coll'assegnare in effetto le quantità indicate in essa, e col vederne l'identicità co' principj dimostrati. In fatti, secondo si è enunciato, preso *comp*.B per parte media, dovrebbe essere, per la prima parte della presente regola, $\cos.B = \text{tang}.c \times \cot.a = \frac{\text{tang}.c}{\text{tang}.a}$, come si è rilevato nel numero 163: e per la seconda parte verrebbe ad esser $\cos.B = \text{sen}.C \times \cos.b$, il che combina col numero 161. E sarà anche facile, prendendo per parte media *comp*. BC, o pure un de' lati AB, AC; il ridurre le due formole della presente regola a quelle esibite negli altri numeri 127, 128, 130, e 132; sicchè da ciò non solamente resterà stabilita una tal regola, ma si rileverà anche, ch'essa in se comprenda le formole tutte in que' numeri rapportate.

LEMMA.

149. È positivo il coseno della metà di due angoli di un triangolo sferico meno il terzo: ed è negativo l'altro della metà de' tre angoli presi insieme.

Parte I. Sieno A, B, C gli angoli di un triangolo sferico, i lati del suo triangolo supplementale saranno 180°—A, 180°—B, 180°—C [133.]; ed uno qualsivoglia di essi 180°—A sarà minore di 360°—B—C, ch'è la somma degli altri due [130], cioè $B+C-A < 180°$, e quindi $\frac{B+C-A}{2} < 90°$; che perciò il segno del coseno di quest' arco sarà positivo [20.].

PARTE II. Poichè $\frac{A+B+C}{2}$ denota sempre un numero di gradi maggiore di 90, e minore di 270; è chiaro perciò, che il suo coseno debba esser negativo [20.].

REGOLA II.

195. In un triangolo sferico, preso per base un lato qualunque, una volta si aggiunga alla semibase la semidifferenza de' lati, ed un' altra volta se ne sottragga; indi a' logaritmi de' seni di quella somma, e di questa differenza si aggiunga il doppio logaritmo del raggio, e tolgansene i logaritmi de' seni di ciascuno de' due lati. Finalmente si divida per metà il residuo ottenuto, e si avrà il doppio logaritmo del seno della metà dell' angolo verticale del triangolo sferico proposto.

Denoti A un tal angolo, b, c, sieno i lati che lo comprendono, ed a la base del triangolo sferico proposto, dovrà essere

$$2.\ log.\ \text{sen.}\ \frac{A}{2} = log.\text{sen.}\frac{a+b-c}{2} + log.\text{sen.}\frac{a+c-b}{2} + 2.\ log.R$$
$$- log.\text{sen.}b - log.\text{sen.}\ c$$

Imperocchè nell'equazione

$$2\ \text{sen.}^2\frac{A}{2} = 1 - \cos.\ A\ [\ 58\ ]$$

si ponga per cos.A il suo valore $\frac{\cos.a - \cos.b\ \cos.c}{\text{sen.}b\ \text{sen.}c}$ [151.], e poi si faccian le debite riduzioni, ne risulterà,

$$2.\text{sen.}^2\frac{A}{2} = \frac{\cos.b\cos.c + \text{sen.}b\ \text{sen.}c - \cos.a}{\text{sen.}b\ \text{sen.}c}$$
$$= \frac{\cos.(b-c) - \cos.a}{\text{sen.}b.\text{sen.}c}\ [\ 48.]$$
$$= \frac{2.\text{sen.}\frac{a+b-c}{2}\ \text{sen.}\frac{a+c-b}{2}}{\text{sen.}b\ \text{sen.}c}\ [\ 62.\ \text{VIII.}]$$

e dividendo per 2, ed introducendo nel secondo membro per fat-

tore il quadrato del raggio, che vi era taciuto, perchè uguale ad 1, il che convien fare per render una tale equazione di pari dimensioni ne' due membri [188], sarà

$$\text{sen.}^2\frac{A}{2}=\frac{\text{sen.}\frac{a+b-c}{2}\ \text{sen.}\frac{a+c-b}{2}R^2}{\text{sen.}b\ \text{sen.}c}$$

Finalmente, passando da'numeri a' logaritmi, si avrà

$$2.\,log.\text{sen.}\frac{A}{2}=log.\text{sen.}\frac{a+b-c}{2}+log.\text{sen.}\frac{a+c-b}{2}+2.log.R$$
$$-log.\text{sen.}b-log.\text{sen.}c$$

come nella presente regola si era enunciato.

Scolio I.

196. Per mezzo di questa regola resta in pratica determinato agevolmente un qualunque angolo di un triangolo sferico da' lati di questo. Ed è chiaro, che nessun dubbio possa insorgere sulla specie di tal angolo, quantunque la sua metà sia esibita dal seno; poichè questa dee necessariamente esser minore di 90°.

Scolio II.

197. Il Nepero nel Libro secondo della sua opera intitolata *Logarithmorum canonis descriptio. Lugd.* 1620, enuncia questa regola nel seguente modo: *Trianguli sphoerici latus quodvis (praecipue quadranti proximus) pro basi statuas. Inde semidifferentiam crurum et ad semibasim addas, et a semibasi subtrahas; producti et residui logarithmos addas, hinc auferas aggregatum ex logarithmis crurum, reliqui bipartiti logarithmi arcum duplices, et provenict angulus verticalis, atque ita coeteri*, tacendovi il doppio logaritmo del raggio, del quale noi abbiamo tenuto conto, per la ragione detta di sopra [187.]. Ed egli illustra una tal regola col seguente esempio, che noi dopo aver risoluto alla sua maniera, maneggeremo colle ordinarie tavole logaritmiche, e secondo la regola da noi data, per far vedere la corrispondenza de'risultamenti.

Nel triangolo CAB [*fig.* 33.] sien dati i tre lati, cioè $a=69°$, che il Nepero prende per base, $b=47°$, $c=34°$, e si cerchi l' angolo A.

Prendasi la semidifferenza de' lati, ch' è $1/2\ (b-c)=6°.30'$; e questa si aggiunga, e si tolga separatamente dalla semibase, ch'è $\frac{a}{2}=34°.\ 30'$, ne risulterà la somma $41°$, e la differenza $28°$.

Ciò posto a . .	*log.* sen.41° =	4215044, secondo Nepero
si aggiunga . .	*log.* sen.28° =	7561472
risulterà		11776516
Poi . . .	*log.* sen.34° = ...	5812606
si sommi con . .	*log.* sen.47° = ...	3128580
e la somma		8941186
si sottragga dalla somma poco fa ottenuta, si avrà il residuo . .		2835330
la cui metà		1417665

sarà il logaritmo del seno della metà dell' angolo verticale A, il quale risulterà perciò, come determina il Nepero, di 60° 12′ 24″: laonde l' intero angolo A sarà di 120° 24′ 49″.

Or maneggiando lo stesso triangolo secondo la nostra regola e colle ordinarie Tavole, si ha

	log. sen.41° =	9. 8169429
	log. sen.28° =	9. 6716093
	2 *log.*R =	20. 0000000
Somma di tutto		39. 4885522
Inoltre . . .	*log* sen 34° =	9 7475617
	log. sen.47° =	9. 8641275
Somma di essi		19. 6116392
Differenza di questa somma dalla poc'anzi trovata . . .		19. 8768630
Metà di questa		9. 9384315 = *log.*sen.60°12′ 24″ 1/2, come dal calcolo di Nepero era già risultato.

REGOLA III.

198. Al logaritmo del coseno della metà della somma de' tre angoli di un triangolo sferico, si aggiunga quello del coseno della metà di due di essi meno il terzo, non meno che il doppio del logaritmo del raggio, e poi se ne tolgano i logaritmi de' seni di que' due stessi angoli; si otterrà il doppio logaritmo del seno della metà del lato che sottende un tal terzo angolo.

Nell' equazione

$$2.\text{sen.}^2\frac{a}{2}=1-\cos.a\,[58.]$$

si ponga $\frac{\cos.A+\cos.B\cos.C.}{\text{sen}\,B\,\text{sen}.C.}$ in vece di $\cos.a$ [155.]; sarà

$$2.\text{sen.}^2\frac{a}{2}=-\frac{\cos.B\cos.C-\text{sen}.B\,\text{sen}.C+\cos A}{\text{sen}.B\,\text{sen}.C}$$

$$=-\frac{\cos(B+C)+\cos.A}{\text{sen}\,B.\text{sen}\,C.}\,[48.]$$

$$=-\frac{2.\cos.\tfrac{1}{2}(A+B+C)\cos.\tfrac{1}{2}(B+C-A)}{\text{sen}\,B\,\text{sen}.C}\;62.\text{VII.}$$

e dividendo per 2, cambiando da — in + il segno di . . . $-\cos.\frac{A+B+C}{2}$ [194.]; e finalmente introducendo nel secondo membro il fattore R^2, per renderlo di pari dimensioni al primo, sarà

$$\text{sen.}^2\frac{a}{2}=\frac{\cos.\tfrac{1}{2}(A+B+C)\cos.\tfrac{1}{2}(B+C-A)}{\text{sen}\,B.\text{sen}.C}R^2$$

Finalmente passando da' numeri a' logaritmi, si avrà

$$2.log.\text{sen.}\frac{a}{2}=log.\cos.\frac{A+B+C}{2}+log.\cos.\frac{B+C-A}{2}+2log.R$$
$$-log.\text{sen}.B-log.\text{sen}.C$$

la quale equazione combina con quello che nella presente regola si è enunciato.

SCOLIO.

199. E per mezzo di questa terza regola è chiaro, che si saprà il seno della metà di un lato di un triangolo sferico dati tre suoi angoli; nè potrà esservi dubbio sulla specie di questa metà, dovendo essa risultar sempre minore di 90°.

REGOLA IV.

200. Al logaritmo della cotangente della metà di un angolo di un triangolo sferico si aggiunga il logaritmo del coseno della semidifferenza de' lati, che gli sono adjacenti, e se ne tolga quello del coseno della semisomma di questi; si avrà il logaritmo della tangente della semisomma de' rimanenti angoli.

E si sarebbe avuto il logaritmo della semidifferenza di questi angoli stessi, se a' logaritmi de' coseni di quelle quantità si fossero sostituiti i logaritmi de' seni di esse.

Sia, come nella Reg. II., A quel primo angolo, e b, c i lati, che lo comprendono, e quindi B, C i rimanenti angoli.

E poichè nel n.° 185 si è rilevato essere

$$\text{tang.}\frac{B+C}{2}=\text{cot.}\frac{A}{2}\times\frac{\cos.\,{}^1/_2\,(b-c)}{\cos.\,{}^1/_2\,(b+c)}$$

e che collo stesso ragionamento ivi fatto si ottiene

$$\text{sen.}a(\text{sen.}B-\text{sen.}C)=\text{sen.}A(\text{sen.}b-\text{sen.}c)$$

donde poi si ricava, collo stesso passaggio indicato in quel numero, l'equazione

$$\frac{\text{sen.}B-\text{sen.}C}{\cos.B+\cos.C}=\frac{\text{sen.}A}{1-\cos.A}\times\frac{\text{sen.}b-\text{sen.}c}{\text{sen.}(b+c)}$$

della quale il primo membro è quanto $\frac{B-C}{2}$ e 'l secondo pareggia $\text{cot.}\frac{A}{2}\times\frac{\text{sen.}\,{}^1/_2\,(b-c)}{\text{sen.}\,{}^1/_2\,(b+c)}$; perciò sarà anche

$$\text{tang.}\frac{B-C}{2} = \text{cot.}\frac{A}{2} \times \frac{\text{sen.}\,{}^1/_2\,(b-c)}{\text{sen.}\,{}^1/_2\,(b+c)}$$

E passando in ciascuna di queste due equazioni da' numeri a' logaritmi, sarà

$$log.\,\text{tang.}\frac{B+C}{2} = log.\,\text{cot.}\frac{A}{2} + log.\,\text{cos.}\frac{b-c}{2} - log.\,\text{cos.}\frac{b+c}{2}$$

$$log.\,\text{tang.}\frac{B-C}{2} = log\ \text{cot.}\frac{A}{2} + log.\,\text{sen.}\frac{b-c}{2} - log.\,\text{sen.}\frac{b+c}{2}$$

Le quali equazioni sono quelle della presente regola.

Scolio.

201. Con queste due equazioni, ritrovando semplicemente cinque logaritmi, è chiaro, che si abbia la tangente della semisomma, e della semidifferenza di due angoli di un triangolo sferico, e quindi tali angoli, quando sia dato il terzo angolo, ed i lati che lo comprendono. E per mezzo di ciascuna di esse si potrebbe anche avere un angolo, dati i lati che lo comprendono, e la somma, o la differenza degli altri due angoli; poichè è manifesto, che in tal caso resta determinato *log.* cot.$^1/_2$ A

REGOLA V.

202. Al logaritmo della tangente della metà di un lato di un triangolo sferico, si aggiunga il logaritmo del coseno della semidifferenza degli angoli ad esso adjacenti, e poi se ne tolga quello del coseno della semisomma di questi; si otterrà il logaritmo della tangente della semisomma degli altri due lati.

E si avrà il logaritmo della tangente della semidifferenza di questi due lati, se a' logaritmi de' coseni di quelle quantità, si sostituiscano i logaritmi de' seni di esse.

Dinotinsi con A′, B′, C′ gli angoli del triangolo supplementale del proposto, e per a', b', c' i lati opposti ad essi: si rileverà, come nella dimostrazione della Regola precedente, che abbiano luogo tra le parti di questo triangolo le seguenti due equazioni

$$\text{tang.}\frac{B'+C'}{2}=\text{cot.}\frac{A'}{2}\times\frac{\cos\,{}^1/_2(b'-c')}{\cos.\,{}^1/_2(b'+c')}$$

$$\text{tang.}\frac{B'-C'}{2}=\text{cot.}\frac{A'}{2}\times\frac{\text{sen.}\,{}^1/_2(b'-c')}{\text{sen.}\,{}^1/_2(b'+c')}$$

le quali colla sostituzione di $180^\circ - b$, $180^\circ - c$, $180^\circ - a$, $180^\circ - B$, $180^\circ - C$ in luogo di B′, C′, A′, b', c', si riducono alle altre due

$$\text{tang.}\frac{b+c}{2}=\text{tang.}\frac{a}{2}\times\frac{\cos.\,{}^1/_2(B-C)}{\cos.\,{}^1/_2(B+C)}$$

$$\text{tang.}\frac{b-c}{2}=\text{tang.}\frac{a}{2}\times\frac{\text{sen.}\,{}^1/_2(B-C)}{\text{sen.}\,{}^1/_2(B+C)}$$

E passando in ciascuna di queste due ultime equazioni da' numeri a' logaritmi, si avrà

$$log.\,\text{tang.}\frac{b+c}{2}=log.\,\text{tang}\,\frac{a}{2}+log.\cos.\frac{B-C}{2}-log.\cos.\frac{B+C}{2}$$

$$log.\,\text{tang.}\frac{b-c}{2}=log.\,\text{tang.}\,\frac{a}{2}+log.\text{sen.}\frac{B-C}{2}-log.\text{sen.}\frac{B+C}{2}$$

ch' è quanto nella presente regola si è enunciato.

SCOLIO.

203. Laonde, per mezzo di questa regola, si potranno rinvenire i logaritmi della metà della somma, e della metà della differenza de' due lati di un triangolo sferico, se pur sien dati il terzo lato, e gli angoli adjacenti ad esso; dond' è chiaro, che tali lati appariranno ad un tratto. Ed è anche manifesto, che ciascuna di queste due ultime equazioni offra un lato qualunque di un triangolo sferico, dall' esser dati gli angoli ad esso adjacenti, e la semisomma, o pur la semidifferenza degli altri due lati; poichè con questi dati si farà noto *log*.tang.$^1/_2 a$, e quindi a

SCOLIO GENERALE

204. Dagli Scolj delle quattro ultime precedenti regole si rileva, che per mezzo di esse restano facilmente e completamente risoluti i Casi I., II., III., IV. della Prop. V. n.° 160: gli altri due V., VI., che comprendono i casi *dubbj*, per la prima loro parte non hanno bisogno di altra formola di risoluzione, oltre quella semplicissima che ne fu data al n.° 171 cas.V, e VI. Una volta però, che siasi nel n.° V. determinato l'angolo ignoto, ch' è opposto all' altro angolo dato, si potrà ottenere il terzo angolo, ed il terzo lato, per mezzo delle formole delle Regole IV., e V., nelle quali le ignote verranno ad essere tang.$^1/_2$ A, e tang.$^1/_2$ a

CAPITOLO VII.

DELLA VALUTAZIONE DELLA PERPENDICOLARE, E DE' SEGMENTI DELLA BASE NE' TRIANGOLI SFERICI.

PROPOSIZIONE IX.

PROBLEMA.

205. Dati i tre lati di un triangolo sferico; determinare la perpendicolare sopra ciascuno di essi abbassata dall' angolo opposto.

Sieno a, b, c i lati del triangolo sferico, e si cerchi l' espressione della perpendicolare BD [*fig.* 38.] sul lato b, cioè BC.

Nella dimostrazione della seconda Regola Neperiana si è ritrovato essere

$$\text{sen.}\frac{B}{2}=\sqrt{\left[\frac{\text{sen.}\tfrac{1}{2}(b+a-c)\,\text{sen.}\tfrac{1}{2}(b+c-a)}{\text{sen.}a\,\text{sen.}c}\right]}$$

e partendo dall' equazione $2.\cos.^2 \tfrac{1}{2}B=1+\cos.B$, con gli stessi passaggi fatti per ritrovar la precedente formola, si sarebbe veduto essere

$$\cos.\frac{B}{2}=\sqrt{\left[\frac{\text{sen.}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(a+c-b)}{\text{sen.}a\,\text{sen.}c}\right]}$$

Adunque sarà $2\text{sen.}\tfrac{1}{2}B\cos.\tfrac{1}{2}B=\text{sen.}B$ [46.] = ...

$$\frac{2\sqrt{[\text{se.}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\text{se.}\tfrac{1}{2}(a+b-c)\text{se.}\tfrac{1}{2}(a+c-b)\text{se.}\tfrac{1}{2}(b+c-a)]}}{\text{sen.}a\,\text{sen.}c}$$

Ma $\text{sen.}B=\dfrac{\text{sen.}AD}{\text{sen.}c}$. Adunque sarà sen.AD.=

$$\frac{2\sqrt{[\text{sen.}(a+b+c)\text{sen.}(a+b-c)\text{sen.}(a+c-b)\text{sen.}(b+c-a)]}}{\text{sen.}a}.$$

espressione comodissima ad esser valutata per mezzo de' logaritmi.

SCOLIO.

206. Ponendo $a+b+c=2s$, si vedrà come nello Scol. al §. 89., che l'espressione precedente si riduce alla forma più semplice

$$\text{sen.AD}=2\sqrt{\left|\frac{\text{sen.}s\ \text{sen.}(s-a)\ \text{sen.}(s-b)\ \text{sen.}(s-c)}{\text{sen.}a}\right|}$$

E poichè la perpendicolare dipende similmente da tutti i lati del triangolo, qualunque sia quello su cui si supponga che cada; sarà perciò facile il trasmutare la precedente espressione, nel caso che la perpendicolare cada sopra un qualunque altro de'due lati.

PROPOSIZIONE X.

PROBLEMA.

207. Cogli stessi dati del Problema precedente, determinare i segmenti BD, DC [*fig.* 38.] prodotti dalla perpendicolare AD nel lato su cui essa cade.

Soluz. Essendo ne'triangoli rettangoli sferici BAD, CAD

$$1 : \text{cos.AD} :: \text{cos.BD} : \text{cos.BA} \quad [\ 160.\ ]$$

ed

$$1 : \text{cos.AD} :: \text{cos.CD} : \text{cos.CA}$$

sarà

$$\text{cos.BD} : \text{cos.BA} :: \text{cos.CD} : \text{cos.CA} \quad [\ 11.\text{V.}\ ]$$

dalla qual proporzione sarà facile a rilevarne l'altra

$$\text{cos.BD}-\text{cos.CD} : \text{cos.BD}+\text{cos.CD} ::$$
$$\text{cos.BA}-\text{cos.CA} : \text{cos.BA}+\text{cos.CA}$$

e quindi

$$\frac{\text{cos.BD}-\text{cos.CD}}{\text{cos.BD}+\text{cos.BD}}=\frac{\text{cos.BA}-\text{cos.CA}}{\text{cos.BA}+\text{cos.CA}}$$

ossia (*)

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(\text{BD}-\text{CD})\text{tang.}\tfrac{1}{2}\text{BC}=\text{tang.}\tfrac{1}{2}(\text{BA}+\text{AC})\text{tan.}\tfrac{1}{2}(\text{BA}-\text{AC})$$

e perciò

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(\text{BD}-\text{CD})=\text{tang.}\tfrac{1}{2}(\text{BA}+\text{AC})\text{tang.}\tfrac{1}{2}(\text{BA}-\text{AC})\text{cot.}\tfrac{1}{2}\text{BC}$$

(*) Il seguente passaggio si ottiene riducendo le precedenti due frazioni per mezzo de'numeri VII., VIII. del §. 62.

cioè: *la tangente della semidifferenza de' segmenti prodotti sul lato a* sarà espressa da

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(c+b)\ \text{tang.}\tfrac{1}{2}(c-b)\ \text{cot.}\tfrac{1}{2}a$$

Ed avendosi per tal modo la differenza de' segmenti prodotti nel lato a, si verrà a conoscere ciascuno di essi. E similmente per ogni altro lato.

SCOLIO I.

208. L' analogia rinvenuta nella soluzione del presente Problema, cioè

$$\text{cos.BD} : \text{cos.BA} :: \text{cos.CD} : \text{cos.CA}$$

fa vedere, che cos.BD sarà maggiore uguale o minore di cos.CD, secondochè sia cos.BA maggiore, uguale o minore di cos.CA; che perciò si vede, che l' arco BD sarà maggiore, uguale o minore dell' arco DC, secondochè l' arco BA lo sarà dell' altro CA. Vale a dire che: *Il maggior segmento sarà sempre adjacente al lato maggiore, il minore al minore.*

SCOLIO II.

209. Allorchè la perpendicolare AD cade fuori del triangolo, l' espressione tang. $\tfrac{1}{2}$ (BD—CD) resta di sua natura cambiata nell' altra tang. $\tfrac{1}{2}$ (BD+CD) senza che vi sia bisogno di nuova calcolazione; ed in tal caso, venendosi a determinare la somma de' segmenti della base, de' quali n' è nota la differenza BC, si farà anche noto ciascun di essi DC, DB.

PROPOSIZIONE XI.

PROBLEMA.

210. Dati i tre angoli di un triangolo sferico, trovar la perpendicolare sopra uno de' lati, per esempio, quella sul lato BC [*a*] [*fig.* 83.].

Dalla dimostrazione della Reg. III. di Nepero, si ha

$$\text{sen.}\frac{b}{2}=\sqrt{\left[\frac{-\cos.\frac{1}{2}(A+B+C)\cos.\frac{1}{2}(A+C-B)}{\text{sen.}A\ \text{sen.}C}\right]}$$

ed inoltre, rilevandosi dall' equazione $2\cos.^2\frac{b}{2}=1+\cos.b$ [58.], che debba essere

$$\cos.\frac{b}{2}=\sqrt{\left[\frac{\cos.\frac{1}{2}(A+B-C)\ \cos.\frac{1}{2}(B+C-A)}{\text{sen.}A\ \text{sen.}C.}\right]}$$

sarà, facendo gli stessi passaggi, che nel Problema antiprecedente, sen. AD =

$$\frac{2\sqrt{[-\cos.\frac{1}{2}(A+B+C)\cos.\frac{1}{2}(A+B-C)\cos.\frac{1}{2}(A+C-B)\cos.\frac{1}{2}(B+C-A)]}}{\text{sen}\ A.}$$

E con una sostituzione analoga a quella dello Scol. del suddetto Problema, ponendo cioè $A+B+C=2S$, la precedente espressione di sen. AD si cambierà in quest' altra

$$\text{sen. AD}=\frac{2\sqrt{-\cos.S\cos.(S-C)\cos.(S-B)\cos.(S-A)}}{\text{sen. A}}$$

E sarà poi facile il congegnare, dopo questa espressione, quelle altre che rappresentano le perpendicolari sugli altri due lati del proposto triangolo sferico.

ALITER

211. Sia EFG [*fig.* 39.] il triangolo supplementale del proposto ABC, e dall' angolo E ch' è supplemento del lato BC su cui cade la perpendicolare AD s' intenda tirata nel lato opposto FG, ch' è supplemento dell' angolo A, la perpendicolare EH, sarà sen. AD = sen. AB sen. B [159] = sen. G sen. EG = sen. EH. Laonde avendo lo stesso seno l' arco AD, e l' altro EH, dovranno esser l' uno supplemento dell' altro [11.]: che perciò essen-

do dati i tre angoli del triangolo sferico ABC, e quindi i lati del suo supplementale EFG; se determinisi in questo la perpendicolare EH, si avrà l'altra AD corrispondente nel triangolo dato ABC, col prendere l'arco supplementale dell'arco EH.

COROLLARIO.

Dalla dimostrazione recata nel principio del precedente *Aliter* si rileva, che: *la perpendicolare in un triangolo sferico è supplemento della perpendicolare nel triangolo supplementale di esso, abbassata nel lato opposto, da quell'angolo ch'è supplemento del lato sopra cui cadeva la perpendicolare nel primo triangolo.*

PROPOSIZIONE XII.

PROBLEMA.

213. Dati i tre angoli del triangolo sferico ABC[*fig.*38.]; determinare i segmenti BAD, CAD di un angolo A prodotti dalla perpendicolare abbassata da esso sul lato opposto, ed i segmenti BD, DC di questo lato.

Soluz. Essendo $\cos.AD = \frac{\cos.\ B}{\text{sen.}BAD} = \frac{\cos.C}{\text{sen.}CAD}$[161], sarà

$\frac{\cos.B}{\text{sen.}BAD} = \frac{\cos.\ C}{\text{sen.}\ CAD}$; e quindi . . . . . .

$$\cos.B : \cos.C :: \text{sen.}BAD : \text{sen.}\ CAD$$

dalla quale analogia si ha poi $\cos.B + \cos.C : \cos.B - \cos.C ::$ $\text{sen.}BAD + \text{sen.}CAD : \text{sen.}BAD - \text{sen.}CAD$; e perciò

$$\frac{\cos.B - \cos.C}{\cos.B + \cos.C} = \frac{\text{sen.}BAD - \text{sen.}CAD}{\text{sen.}BAD + \text{sen.}CAD}$$

la quale equazione ridotta per mezzo de' numeri V, VI, VII, ed VIII del §. 62. darà

$$\text{t.}\ \tfrac{1}{2}(B+C)\ \text{t.}\ \tfrac{1}{2}(B-C) = \text{cot.}\ \tfrac{1}{2}(BAD+CAD)\ \text{t.}\ \tfrac{1}{2}(BAD-CAD)$$

e quindi

tang.$^1/_2$ (BAD—CAD)=tang.$^1/_2$A.tang.$^1/_2$ (B+C)tang.$^1/_2$(B—C), che perciò, risultando determinata la differenza de' segmenti dell' angolo verticale, lo saranno per conseguenza anche questi; ed allora ne' triangoli sferici rettangoli BAD, CAD sarà facile il determinare gli archi BD, DC.

Scolio I.

214. Dall' analogia ritrovata nel presente Problema, cioè

cos.B : cos.C :: sen.BAD : sen.CAD

si rileva, che essendo cos.B> cos.C debba anche essere . . . . sen.BAD > sen. CAD. Or quando cos. B è maggiore di cos. C, l' angolo B risulta minore dell' altro C; e nel tempo stesso dovendo essere sen. BAD maggiore di sen. CAD, quell' angolo è maggiore di questo. Adunque si vede, che: *Il segmento maggiore dell' angolo verticale di un triangolo sferico corrisponde verso quella parte ove sta l' angolo alla base minore; ed al contrario.*

Scolio II.

Intorno alla soluzione di questo Problema bisogna fare la stessa avvertenza che fu fatta per quella dell'antiprecedente al numero 209.

CAPITOLO VIII.

DELLA MISURA DELLA SUPERFICIE, E DEL PERIMETRO DI UN TRIANGOLO SFERICO.

PROPOSIZIONE XIII.

PROBLEMA.

216. Dati i tre angoli di un triangolo sferico appartenente ad una sfera di un dato raggio; determinare la superficie di quel triangolo.

Sia il triangolo sferico dato ABC [*fig.* 40.]. Si compia dall'uno de' suoi lati BC il circolo BCDE, e poi si prolunghino gli altri due lati BA, AC da una parte fino alla circonferenza di quel circolo in D, E, e dall'altra finchè s'incontrino in F. E poichè l'arco EAC è di 180°, del pari che l'altro ACF [115.], sarà perciò l'arco EA uguale all'altro CF; e similmente si dimostra l'arco DA uguale a BF. Ma è poi l'angolo sferico BFC uguale all'altro BAC [127], e questo al suo verticale DAE. Laonde i due triangoli sferici BFC, DAE [128] saranno tra loro uguali [140.], e quindi la porzione di superficie sferica racchiusa tra i due semicerchi ABF, ACF, la qual dicesi ordinariamente *fuso sferico*, sarà uguale alla somma de'due triangoli sferici ABC, EAD. Or siccome il fuso ABFC è uguale al prodotto del diametro della sfera cioè di 2R nell'arco di cerchio massimo che misura l'inclinazione de'due cerchi ACF, ABF da'quali è terminato, ridotto nelle unità del raggio (*); e

(*) *N. B.* Si può dimostrare come nella Prop. 4. del Lib. III. che il fuso ADBE stia all'altro AEBF, come DE ad EF, dal che rilevandosi poi facilmente, che l'intera superficie sferica stia ad un suo fuso ADBE, come la circonferenza HKC all'arco DE, o come il prodotto di quella circonferenza nel diametro al prodotto del diametro stesso nell'arco DE, se ne dedurrà, che siccome quel primo prodotto pareggia la superficie della sfera, così il secondo debba uguagliare il fuso ADBE.

che un tal arco è dello stesso numero di gradi e minuti che l' angolo sferico A del triangolo proposto; perciò sarà la somma de'due triangoli sferici BAC, EAD$=A\times 2R$. Similmente, siccome la somma de' due triangoli sferici ACB, ADC compie il fuso BADC, perciò sarà $BAC+ADC=B\times 2R$; e così pure si vedrà esser $BAC+EAB=C\times 2R$, mentre questi due ultimi triangoli sferici formano il fuso CAEB. Laonde riunendo in una somma queste grandezze, ed in un' altra que' prodotti che gli sono rispettivamente uguali, sarà $3BAC+EAB+DAC+EAD=(A+B+C)\times 2R$. Ma $BAC+EAB+DAC+EAD$ forma, come si vede, la superficie dell' emisfero EBCDA, la quale adegua il prodotto $360^\circ\times R$, o $180^\circ\times 2R$, supposto che il primo fattore 180° si riduca all' unità del secondo. Adunque sarà

$$2BAC+180^\circ\times 2R=(A+B+C)\times 2R$$

e quindi togliendone di comune $180^\circ\times 2R$, e prendendo le metà de' due residui, sarà

$$BAC=(A+B+C-180^\circ)\times R.$$

Vale a dire, che: *la superficie di un triangolo sferico di una data sfera, è quanto l'eccesso della somma de' suoi tre angoli su* 180° *ridotto in parti del raggio della sfera, e multiplicato per questo.*

Scolio.

217. Questa semplicissima esibizione della superficie di un triangolo sferico è dovuta al Wallis; ed essa ci mostra, che:

È la stessa la superficie di tutti i triangoli sferici, ne' quali la somma degli angoli è la medesima. Ed essendo diverse queste somme, tali superficie sono proporzionali all' eccesso di esse somme sopra 180°

Il qual carattere di eguaglianza, e di rapporto de' triangoli sferici è incomunicabile co' triangoli rettilinei.

PROPOSIZIONE XIV.

PROBLEMA

218. Determinare l' aja di un triangolo sferico, dati i suoi tre lati.

Soluz. Questo Problema si vede chiaramente che si potrebbe ridurre al precedente, quando da' tre lati dati si passasse a determinare i tre angoli del triangolo sferico. Siccome però non v' ha bisogno de' tre angoli, ma della loro somma per esibire l'aja di un triangolo sferico, così esso sarà più facilmente risoluto riducendolo al seguente:

Dati i tre lati di un triangolo sferico; trovare la somma de' suoi angoli.

Sien dati i tre lati a, b, c opposti rispettivamente agli angoli A, B, C, [*fig.* 33.] e chiamisi $2s$ la loro somma. E poichè cos. $(A+B+C) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
cos. $\frac{1}{2}(A+B)$ cos. $\frac{1}{2}C$ — sen. $\frac{1}{2}(A+B)$ sen. $\frac{1}{2}C$ [45] $=$
(cos. $\frac{1}{2}A$ cos. $\frac{1}{2}B$ — sen. $\frac{1}{2}A$ sen. $\frac{1}{2}B$) cos. $\frac{1}{2}C$ — . .
(sen. $\frac{1}{2}A$ cos. $\frac{1}{2}B$ + cos. $\frac{1}{2}A$ sen. $\frac{1}{2}B$) sen. $\frac{1}{2}C$ [45.]
sostituendo per sen. $\frac{1}{2}A$, cos. $\frac{1}{2}A$, sen. $\frac{1}{2}B$, cos. $\frac{1}{2}B$, sen. $\frac{1}{2}C$, cos. $\frac{1}{2}C$ i loro rispettivi valori ne' lati del triangolo proposto (la forma de' quali, pe' seni, fu rinvenuta nella dimostrazione della Regola II^a. Neperiana, e pe' coseni si ottiene col metodo stesso ivi tenuto applicato all' equazione $1 + \cos. A = 2. \cos. \frac{A}{2}$), e riducendo col sostituire s per la semisomma de' lati a, b, c, si avrà

$$\cos.\frac{A+B+C}{2}=\left[\sqrt{\frac{\text{sen}.s\,\text{sen}.(s-a)}{\text{sen}.b\,\text{sen}.c}}\sqrt{\frac{\text{sen}.s\,\text{sen}\,(s-b)}{\text{sen}.a\,\text{sen}\,c}}-\right.$$

$$\left.\sqrt{\frac{\text{sen}.(s-b)\text{sen}.(s-c)}{\text{sen}.b\,\text{sen}.c}}\sqrt{\frac{\text{sen}.(s-a)\text{sen}.(s-c)}{\text{sen}.a\,\text{sen}.c}}\right]\sqrt{\frac{\text{sen}.s\,\text{sen}.(s-c)}{\text{sen}\,a\,\text{sen}.b}}$$

$$-\left[\sqrt{\frac{\text{sen}\,(s-b)\,\text{sen}.(s-c)}{\text{sen}.b\,\text{sen}.c}}\sqrt{\frac{\text{sen}.s\,\text{sen}\,(s-b)}{\text{sen}.a\,\text{sen}.c}}+\right.$$

$$\left.\sqrt{\frac{\text{sen}.s\,\text{sen}.\,(s-a)}{\text{sen}.b\,\text{sen}.c}}\sqrt{\frac{\text{sen}.(s-a)\text{sen}.(s-c)}{\text{sen}.a\,\text{sen}.c}}\right]\sqrt{\frac{\text{sen}.(s-a)\text{sen}\,(s-b)}{\text{sen}.a\,\text{sen}.b}}$$

$$=\sqrt{\frac{\text{sen}.s\,\text{sen}.(s-a)\,\text{sen}.(s-b)\text{sen}.\,(s-c)}{\text{sen}.a\,\text{sen}.b\,\text{sen}.c}}\times[\text{sen}.\,s-\text{sen}.\,(s-c)$$

$$-\text{sen}.(s-b)-\text{sen}.(s-a)]$$

Ma $\text{sen}.s-\text{sen}.\,(s-c)=2.\,{}^1/_2\,c\cos.\,(s-{}^1/_2\,c)$ [62.VI.] $=$ $2.\,\text{sen}.{}^1/_2 c\cos.{}^1/_2(a+b)$; e $\text{sen}.\,(s-b)+\text{sen}.\,(s-a)=$ $2.\,\text{sen}.\,[\,s-{}^1/_2(a+b)\,]\cos.\,{}^1/_2(a-b)$ [62. V.] $=$ . . $2.\,\text{sen}.{}^1/_2 c\cos.{}^1/_2(a-b)$. Laonde sarà . . . . . .

$\text{sen}.\,s-\text{sen}\,(s-c)-\text{sen}.\,(s-b)-\text{sen}.\,(s-a)=$ $-2.\,\text{sen}.\,{}^1/_2\,c[\cos.\,{}^1/_2\,(a-b)-\cos.\,{}^1/_2\,(a+b)]=$ $-2.\,\text{sen}.\,{}^1/_2\,c\times 2.\,\text{sen}.\,{}^1/_2\,b\,\text{sen}.\,{}^1/_2\,a$ [48.]; e quindi

$$\cos.\frac{A+B+C}{2}=\frac{4.\text{sen}.\,{}^1/_2\,a\,\text{sen}.\,{}^1/_2\,b\,\text{sen}.{}^1/_2\,c}{\text{sen}\,a\,\text{sen}.b\,\text{sen}.c}\sqrt{\text{sen}.\,s\times}$$

$$\text{sen}.\,(s-a)\,\text{sen}.\,(s-b)\,\text{sen}.\,(s-c)$$

Che perciò, essendo $\text{sen}.a=2.\text{sen}.{}^1/_2\,a\cos{}^1/_2\,a$ [46.], e similmente riducendo sen. b, sen. c, e poi facendo quest'ultima sostituzione nella formola precedente, si avrà

$$\cos\frac{A+B+C}{2}=-\frac{\sqrt{\text{sen}.s\,\text{sen}.\,(s-a)\,\text{sen}.\,(s-b)\,\text{sen}.\,(s-c)}}{2\cos{}^1/_2\,a\cos.{}^1/_2\,b\cos{}^1/_2\,c}$$

la qual formola rinvenuta dal Cagnoli è assai più comoda pel calcolo dell' altra che ne diede il de Gua per la soluzione del presente Problema.

SCOLIO GENERALE.

219. Siccome in ogni altro caso di tre parti date nel triangolo sferico, sempre si viene ad avere due angoli ed un lato, o due lati ed un angolo; così determinandosi nel primo caso il ter-

zo angolo, e nel secondo il terzo lato, si risolverà il Problema della valutazione dell'aja, riducendolo ad uno de' due precedenti: che perciò ci asterremo dal quì recare per questi altri casi soluzioni dirette, tanto più che queste conducono a formole incongrue pel calcolo logaritmico.

Il Signor Cagnoli nella sua dottissima Trigonometria raccomanda, per l'utilità di cui può essere nella descrizione de' Planisferi, che sia *ripetuta* e *divulgata* la regola del Signor de Gua per ridurre in settori circolari la superficie del triangolo sferico, la qual regola egli chiama *meccanica determinazione*, quantunque in realtà non sia che una geometrica construzione della formola di sopra recata [216.] per l'aja del triangolo sferico: ed una tal construzione ottiensi nel seguente modo.

Si descriva col centro O [*fig.* 41.], e col raggio della sfera della cui superficie è parte un triangolo sferico, il cerchio ACB; e nella sua circonferenza si prendano, da un punto A, gli archi AC di 90°, ed $ACB = \frac{1}{2}(A + B + C)$, A, B, C dinotano gli angoli del triangolo sferico. Finalmente giungansi le OC, OB, sarà il settore $COB = \frac{1}{2}(A+B+C-180^\circ)\times\frac{1}{2}R$, cioè la quarta parte del proposto triangolo sferico.

PROPOSIZIONE XV.

PROBLEMA.

220. Dati i tre angoli di un triangolo sferico, determinare il perimetro di esso.

Soluz. Per risolvere il proposto Problema, che, come si vede, è l'inverso di quello al quale si era ridotto il precedente, si prenda la formola in quello trovata, dinotante il coseno della semisomma de' tre angoli ne' lati, ed essa si trasformi per mezzo del triangolo supplementale, si avrà la seguente altra

$$\text{sen.}\frac{a+b+c}{2} = \frac{\sqrt{-\cos.S \cos.(S-A) \cos.(S-B) \cos.(S-C)}}{2.\text{sen.}\frac{1}{2}A \ \text{sen.}\frac{1}{2}B \ \text{sen.}\frac{1}{2}C}$$

che soddisfa al presente Problema, e nella quale S rappresenta la semisomma degli angoli.

ELEMENTI
DI
TRIGONOMETRIA

LIBRO V.

USO DELLE FORMOLE TRIGONOMETRICHE NELLA SOLUZIONE DI TALUNI PROBLEMI GEOMETRICI.

221. Allorchè tra i dati di un Problema geometrico contengonsi quantità angolari, o pur che queste derivinsi nello svolgimento delle conseguenze che si fa per pervenirsi da que' dati a fissar l'equazione al Problema, supposto che esso algebricamente si risolva, se mai la natura del Problema è tale, che il quesito si richiegga in valore, e non già geometricamente; in tal caso la Trigonometria offre pronti mezzi per riuscire. Siccome però è vantaggioso il ricorrere alle formole Trigonometriche nel cennato caso, così è, per servirmi di una frase del Cartesio, un *peccato in Geometria*, contro del quale *meritamente griderebbe Euclide*, *e tutta la Scuola Euclidea*, se di esse si facesse uso, quando dell'equazione al Problema se ne volesse una Geometrica composizione; sopra di che sommi Geometri moderni hanno posta sì poca avvertenza, ch'è ormai passato in costume di frammischiare nelle geometriche soluzioni di que' Problemi, che mediante l'Algebra si maneggiano, ove occorrano triangoli dati di specie, formole comprendenti seni e coseni, o altre linee trigonometriche, come se nulla ripugnasse alla severa Geometria l'intrudere, nelle sue operazioni esatte, quantità approssimanti. Ciò non ostante si può anche in questi casi usar talvolta di esse con grandissimo

vantaggio, senza derogare al rigore di un'esatta composizione geometrica del Problema, come nel seguente Libro faremo rilevare.

Le ragioni finora dette mi hanno determinato a trattare in questo Libro e nel seguente di *Applicazione della Trigonometria a ricerche geometriche*, stimando, che siccome da una parte non bisognava tralasciare di far conoscere l'uso vantaggioso che di essa può farsi nella risoluzione de' Problemi, dall'altra dovessero tali considerazioni a dirittura separarsi dall'ordinaria *Applicazione dell'Algebra alla Geometria*, ove le equazioni de' Problemi convien che sieno geometricamente construite. Ed acciocchè meglio s'intenda quanto ho finora accennato circa la distinzione dell'esibizione del quesito di taluni Problemi in valore, o geometrica construzione, que' Problemi che tratterò nel presente Libro in riguardo alla prima specie di quesito, verranno anche recati nell' *Applicazione dell'Algebra alla Geometria*, che formerà l'oggetto del secondo volume del mio *Corso di Analisi Algebrica*. Soggiugnerò inoltre, che il presente Libro forma come una continuazione de' due ultimi Capitoli del Libro II. e IV. del presente Trattato, avendo recati in quelli solamente un certo numero di que' Problemi in cui i dati e il questo alle immediate regole della risoluzione del triangolo gli rimettevano, sicchè si potesse per risolverli fare anche a meno di ricorrere a simboli, e a maneggio di equazioni.

PROPOSIZIONE I.

PROBLEMA.

222. Esibire quel triangolo di cui sia data l'aja, il perimetro, ed uno degli angoli.

Soluz. L'aja sia espressa da a^2, il perimetro da p, e l'angolo dato sia B [*fig.* 11.]; e suppongasi che per l'esibizione del quesito del proposto Problema si voglia in prima determinare il lato AC, che si chiami x, opposto a quell'angolo dato.

Si tiri dall' uno degli altri due angoli A la perpendicolare AD sul lato opposto BC. E poichè nel triangolo ABC è dato l'angolo in B, e l'aja, dovrà esser dato anche il rettangolo de' lati AB, BC, che verrà espresso da $\frac{2a^2}{\text{sen.B}}$

Ed essendo $AB + BC = p - x$, sarà $AB^2 + 2AB \times BC + BC^2 = p^2 - 2px + x^2 = p^2 - 2px + AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \cos.B$; e quindi $2AB \times BC\,(1 + \cos B) = p^2 - 2px$, cioè, ponendo per $2AB \times BC$ il valore poc' anzi trovato, sarà . . . . . .

$$p^2 - 2px = 4a^2 \left[\frac{1 + \cos.B}{\text{sen.B}}\right] = 4a^2 \cot. \tfrac{1}{2} B \quad [\ 59.\ ]$$

$$x = \tfrac{1}{2}p - \frac{2a^2}{p} \cot. \tfrac{1}{2} B$$

E gli altri due lati si determineranno per mezzo delle formole esibite nella Prop. XVIII. del Lib. II.

SCOLIO.

223. Nel risolvere il presente Problema si è preferito di determinar prima il lato AC opposto all' angolo dato, come aveva fatto il Cagnoli, nella sua Trigonometria; poichè per tal modo la soluzione riesce più facile, pervenendosi per la determinazione di tal lato ad una equazione di 1°. grado; mentre volendo esibire prima l' un de' lati adjacenti a quell' angolo, come ha fatto il Newton, l' equazione al Problema, per la determinazione dell' un di essi, sarebbe stata di 2°. grado, come intuitivamente si vede, dovendo tal equazione includere i valori dell' un lato e dell' altro, mentre questi stanno similmente a tutte le condizioni del Problema.

PROPOSIZIONE II.

PROBLEMA.

224. Esibire un triangolo ABC [*fig.* 24.], in cui i tre lati AB, AC, CB, e la perpendicolare CD sieno in geometrica proporzione.

Soluz. É chiaro dall'enunciazione, che il triangolo non sia cercato che di sola specie, che perciò la presente ricerca si riduca a determinare gli angoli. Per ottenere ciò, si abbassi dal punto A sul lato opposto BC la perpendicolare A*c*, e da *c* sulla BA l'altra perpendicolare *cd*. Ed essendo

$$BA : Ac :: Bc : cd$$

e

$$BA : AC :: BC : CD$$

sarà

$$BA : Ac :: BA : AC \quad [\text{ 11. V. }]$$

che perciò l'angolo in C dovrà esser retto; cioè la A*c* dovrà coincidere con la AC.

Ciò posto sia

$$AB : AC :: 1 : \cos. A \quad [\text{ 72. }]$$

$$AC : CB :: 1 : \text{tang}.A \quad [\text{ 74. }]$$

che perciò dovrà essere, per le condizioni del Problema,

$$1 : \cos.A :: 1 : \text{tang}.A$$

e

$$\cos.A = \text{tang}.A = \frac{\text{sen}.A}{\cos.A}$$

cioè

$$\cos.^2 A = \text{sen}.A$$

o sia

$$1 - \text{sen}.^2 A = \text{sen}.A$$

la quale equazione risoluta dà $\text{sen}.A = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} = \cos.B$ (si tralascia il segno — del radicale, come conducente ad assurdo nella presente quistione) cioè sarà, trascurando i secondi, l'angolo $A = 38^\circ\ 10'$, e l'altro $B = 51^\circ\ 50'$.

Scolio.

225. La soluzione qui esibita del proposto Problema dà luogo alla seguente geometrica composizione del medesimo.

Sul diametro AB [*fig.* 43.] di un semicerchio ACB si elevi la perpendicolare BE uguale al raggio di tal cerchio, e congiunta la AE, si tagli la EF uguale al raggio stesso; e poi si applichi in quel semicerchio, dal punto B, la BC uguale alla AF, e giungasi la AC; sarà ACB il triangolo cercato.

Imperocchè essendo $AE^2 - EF^2 = AB^2$; sarà $AB^2 = (AE + EF) \times FA = (BA + AF) \times AF = (BA + BC) \times BC = BA \times BC + BC^2 = BA \times BC + AB^2 - AC^2$. Laonde sarà $BA \times BC = AC^2$; e perciò BA : AC :: AC : BC, ed anche come BC : CD [8. VI.].

PROPOSIZIONE III.

PROBLEMA.

226. Nel quadrilatero ABDC [*fig.* 44.], che ha gli angoli in B, C retti, dati i lati AB, AC, e l' angolo A compreso da essi; determinare gli altri due lati CD, DB, e le diagonali AD, BC.

Soluz. Si prolunghino i lati AC, BD del quadrilatero finchè s' incontrino in E, e pongasi $AB = a$, $AC = b$. E poichè sta AE : AB :: 1 : cos.A, sarà $AE = \frac{a}{\cos.A}$ e quindi $CE = \frac{a}{\cos.A} - b$. E così pure, essendo

BA : BE :: 1 : tang.A, sarà $BE = a \times \text{tang.A}$.

Or pe'triangoli simili ABE, DCE sta EB : BA : EC : CD, cioè $a \times \text{tang. A} : a :: \frac{a}{\cos.A} - b : CD$. Adunque sarà $CD = \frac{a}{\cos.A\,\text{tang.A}} - \frac{b}{\text{tang.A}} = \frac{a}{\text{sen. A}} - \frac{b}{\text{tang.A}} = \frac{a - b\cos.A}{\text{sen. A}}$.

E similmente, se si fossero prolungate le AB, CD sino ad incontrarsi, la BD dovrà risultare uguale a $\frac{b - a\cos.A}{\text{sen. A}}$.

Si sono dunque ottenuti i valori de' lati DB, DC. Ed è poi pel triangolo BAC, la diagonale $BC = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab\cos.A)}$; e pel triangolo rettangolo ACD l'altra diagonale $AD = \sqrt{(AC^2 + CD^2)}$

$$\sqrt{\left[b^2 + \left(\frac{a - b\cos.A}{\text{sen.A}}\right)^2\right]} = \sqrt{\left[\frac{a^2 + b^2 - 2ab\cos A}{\text{sen.A}}\right]}$$

Adunque si è interamente soddisfatto alle condizioni del proposto Problema.

PROPOSIZIONE IV.

Problema.

227. Dato l'angolo solido O [*fig.* 45.] di un parallepipedo qualunque, ed i tre lati OA, OP, OQ intorno ad esso; determinare quel solido.

Soluz Col centro O, e col raggio OA s'intenda descritta una superficie sferica, e sia ABC quel triangolo sferico di questa, che sottende l' angolo solido proposto, che or trovasi al centro di essa, e del quale saranno dati i lati a, b, c, come dell'istesso numero di gradi e minuti degli angoli che essi rispettivamente sottendono. S'intenda abbassata da A sul piano opposto POQ la perpendicolare AE, e per questa, e pel centro O s' intenda tirato un piano che segnerà in quel triangolo sferico l'arco AD perpendicolare all' altro DC, e si avrà

$$\text{sen. AD} = \frac{2\sqrt{\text{sen } s \text{ sen.}(s-a)\text{sen.}(s-b)\text{sen.}(s-c)}}{\text{sen.}a} \quad [206.]$$

e quindi, dinotando la OA con r, sarà AE = AO sen.AD, cioè

$$\text{AE} = \frac{2r\sqrt{\text{sen.}s\,\text{sen.}(s-a)\text{sen.}(s-b)\text{sen }(s-c)}}{\text{sen.}a}$$

Or il parallelogrammo costituito co' lati PO, OQ, e coll'angolo dato da essi compreso, ponendo PO$=p$, ed OQ$=q$, ha per espressione del suo valore pq.sen.a. Adunque la solidità del proposto parallelepipedo sarà espressa da

$$2rpq\sqrt{\text{sen.}s.\text{sen.}(s-a)\text{sen.}(s-b)\text{sen.}(s-c)}$$

Scolio.

228. E da ciò risulta, che se nella piramide triangolare AOQP [*fig.* 46.] sieno dati i tre lati OA, OP, OQ intorno al dato angolo solido in O, la solidità di essa si avrà prendendo la sesta parte di quella del parallelepipedo che si compi-

rebbe col dato angolo solido O, e co' lati OA, OP, OQ. E sarà poi facile il ridurre al caso precedente la valutazione della solidità di una piramide, dati tutti i sei lati di essa.

PROPOSIZIONE V.

PROBLEMA.

229. Con gli stessi dati del Problema precedente; determinare le diagonali di quel parallelepipedo.

Soluz. È chiaro che queste diagonali sieno quattro, due che sono quelle stesse del parallelogrammo AOEF, che passa pe' lati AO, EF del parallelepipedo, e due altre che appartengono per diagonali all'altro parallelogrammo HPQG, che passa pe' lati PH, QG di tal solido.

Or ecco in qual modo bisognerà condursi per determinarle. $OE^2 = OP^2 + PE^2 + 2OP \times PE \cos POQ = p^2 + q^2 + 2pq \cos. a$ e quindi $OE = \sqrt{(p^2 + q^2 + 2pq \cos.a)}$. Ed é poi . . . .

$$\cos. POE = \frac{OP^2 + OE^2 - PE^2}{2PO \times OE} [\ 77.\ ] = \frac{p + q \cos.a}{\sqrt{(p^2 + q^2 + 2pq \cos.a)}}$$

$$\text{sen. } POE = \frac{PE \times \text{sen. } POQ}{OE} [\ 75.\ ] = \frac{q \text{ sen. } a}{\sqrt{(p^2 + q^2 + 2pq \cos. a}}$$

Di più nell'angolo solido O del parallelepipedo proposto, conoscendosi i tre angoli piani in O, che lo comprendono, si potrà determinare l'inclinazione scambievole di que' piani in cui essi esistono, col risolvere il triangolo sferico ABC [*fig.* 45.] che sottende quell'angolo solido, per determinarvi gli angoli da' lati [127.], che perciò sarà

$$\cos. B = \frac{\cos.b - \cos.a \cos.c}{\text{sen.}a \text{ sen.}c} [\ 151.\ ]$$

e quindi nell'altro triangolo sferico ABC′ [*fig.* 47.], che sottende l'altro angolo solido in O compreso dagli angoli piani AOP, POC′ inclinati tra loro nell'angolo dato B, si avrà

$$\cos.b' = \cos.a' \cos.c + \text{sen.}a' \text{ sen.}c \cos. B [\ 151.\ ]$$

cioè, sostituendo per cos. a' e sen. a' i loro valori di sopra ritrovati, e poi riducendo, sarà

$$\cos. b' = \cos. AOE = \frac{p \cos c + q \cos. b}{\sqrt{(p^2 + q^2 + 2pq \cos. a)}}$$

Finalmente nel triangolo AOE essendo

$$AE^2 = AO^2 + OE^2 + 2AO \times OE \cos. AOE$$

si avrà, fatte le convenienti riduzioni . . . . . .

$$AE^2 = r^2 + p^2 + q^2 + 2pq \cos. a + 2pr \cos. c + 2qr \cos. b.$$

E siccome il valore del quadrato dell' altra diagonale OF non si distingue da quello della già ottenuta, se non perchè il coseno dell'angolo OAF supplemento dell' angolo AOE, è di segno contrario a quello di quest' angolo; perciò si avrà

$$OF^2 = r^2 + p^2 + q^2 + 2pq \cos. a - 2pr \cos. c - 2qr \cos. b.$$

Or per avere le altre due diagonali HQ, GP del parellelepipedo proposto, sarebbe bisogno di fare tutti gli stessi passaggi finora fatti, valendosi però dell' angolo solido in P invece di quello in O; ed in quell' angolo solido, de' tre angoli piani che lo comprendono, i due HPO, OPE essendo i supplementi degli altri AOP, POQ (c, a), due de' tre che comprendono l'angolo solido in O, (il terzo HPE è uguale al terzo AOQ); debbono perciò aver quelli i coseni di contrario segno a' coseni di questi. Adunque si avranno le espressioni de' quadrati delle diagonali HQ, GP cambiando rispettivamente nelle già ritrovate per AE^2, FO^2 i segni di cos a, cos. c; e così facendo sarà

$$HQ^2 = r^2 + p^2 + q^2 - 2pq \cos. a - 2pr \cos c + 2qr \cos. b$$

$$PG^2 = r + p^2 + q^2 - 2pq \cos. a + 2pr \cos. c - 2qr \cos b$$

SCOLIO.

230. Sommando insieme le espressioni ottenute nel precedente Problema per le quattro diagonali di un parallelepipedo, si vedrà esser

$$AE^2 + OF^2 + HQ^2 + CP^2 = 4(r^2 + p^2 + q^2)$$

cioè: *la somma de' quadrati delle quattro diagonali di un parallelepipedo è il quadruplo della somma de' quadrati de' tre lati dintorno ad un angolo solido del medesimo.*

ELEMENTI
DI
TRIGONOMETRIA

LIBRO VI.

DELL'USO CHE PUO' FARSI DELLE FORMOLE TRIGONOMETRICHE NELLA SOLUZIONE ALGEBRICA DI TALUNI PROBLEMI, CHE DEBBONO POI ESSER GEOMETRICAMENTE COSTRUITI.

231. Le formole Trigonometriche principali non sono altro, come si è tante volte veduto, che il risultamento di proporzioni geometriche nelle quali si è espresso l'un de'termini per mezzo degli altri tre; esse dunque in loro implicitamente comprendono quelle analogie donde sono derivate, e quindi possonsi utilmente impiegare nel risolvimento de'Problemi in risparmio di proporzioni risultanti da triangoli dati di specie. E questi Problemi resteranno tuttavia suscettivi di una convenevole geometrica composizione, purchè o quelle formole, o analogie che esse dinotano, necessarie solamente allo sviluppo della catena de'dati per conseguenza, svaniscano da loro medesime nell'equazione finale al Problema, il che non di rado avviene; o pure ottenuta quella, si sappiano esse maestrevolmente trasmutare ne' convenevoli rapporti, che rappresentano. E noi l'una e l'altra delle suddette cose dinoteremo meglio co'seguenti Problemi, de'quali non abbiamo multiplicato il numero, per lasciar luogo a' giovani di esercitarsi da loro medesimi.

Avvertiremo intanto, che siccome l'eleganza nella soluzione de' Problemi, la qual consiste principalmente nella facilità della loro geometrica composizione, è la primaria qualità che i Geometri accorti vi richieggono; così colui che si occupa a risolverli dee sempre preferir que' mezzi, nella multiplicità de' metodi che la Geometria e l'Analisi somministra, che sono più conducenti allo scopo suddetto. Che perciò non converrà usare le formole trigonometriche per l'oggetto sopraindicato, se non quando effettivo vantaggio se ne ritragga in ottenerne l'equazione finale: e debbono poi le trasformazioni da farsi, se mai occorrano, per renderla scevra da quantità trigonometriche, esser semplici, e facili; sicchè non si abbia, prima di giungere alla costruzione geometrica dell'equazione, a durar molti stenti, e molta fatica in renderla puramente algebrica. E potrà anche farsi uso di formole trigonometriche in dimostrar Teoremi, quando in quelle dimostrazioni vi sia necessario l'uso de' triangoli simili, come in più luoghi del presente Trattato si è potuto vedere.

PROPOSIZIONE I.

PROBLEMA.

232. Dati i lati di un quadrilatero inscritto nel cerchio; determinare le diagonali.

Soluz. Sia ABCD [*fig* 48.] quel quadrilatero, i cui lati AB, BC, CD, DA dicansi rispettivamente a, b, c, d. Si esprima inoltre con x la diagonale AC, e con y l'altra BD.

Ed essendo nel triangolo ABC, $x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos.B = a^2 + b^2 + 2ab \cos.D$; e $\cos. D = \frac{c^2 + d^2 - x^2}{2cd}$ [77.], sarà

$$x^2 = a^2 + b^2 + 2ab \left[\frac{c^2 + d^2 - x^2}{2cd}\right]$$

Donde si avrà

$$x \sqrt{\left[\frac{(a^2+b^2)cd + (c^2+d^2)ab}{cd + ab}\right]}$$

E similmente si troverà essere

$$y=\sqrt{\left[\frac{(a^2+d^2)bc+(b^2+c^2)ad}{bc+ad}\right]}$$

Le quali espressioni delle diagonali, sono, come ben si vede, scevre da grandezze trigonometriche, e geometricamente construibili.

PROPOSIZIONE II.

PROBLEMA.

233. Date tre rette, ritrovare il diametro di quel cerchio, in cui essendo esse successivamente adattate, verrebbero a sottendere una mezza circonferenza.

Soluz. Sia ABCD [*fig.* 49.] il circolo cercato, ed AB, BC, CD dinotino le date tre rette, adattate successivamente in esso per corde, sicchè l'arco ABCD sia una mezza circonferenza, cioè 180°.

Si dinoti la corda AB per a, la BC per b, e la CD per c ed il diametro ignoto AD per x. Inoltre si chiamino α, β, γ gli archi AB, BC, CD; sarà

$$\text{sen.}\tfrac{1}{2}\alpha=\frac{a}{x}\ [30] \qquad \cos.\tfrac{1}{2}\alpha=\sqrt{\left[1-\frac{a^2}{x^2}\right]}$$

$$\text{sen.}\tfrac{1}{2}\beta=\frac{b}{x} \qquad \cos.\tfrac{1}{2}\beta=\sqrt{\left[1-\frac{b^2}{x^2}\right]}$$

$$\text{sen.}\tfrac{1}{2}\gamma=\frac{c}{x}$$

Or perchè i tre archi α, β, γ compiono 180°, perciò ciascun di essi è quanto 180° meno la somma degli altri due. Adunque sarà

$$\text{sen.}\tfrac{1}{2}\gamma=\text{sen.}\tfrac{1}{2}[180^\circ-(\alpha+\beta)]$$
$$=\cos.\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)=\cos.\tfrac{1}{2}\alpha\cos.\tfrac{1}{2}\beta-\text{sen.}\tfrac{1}{2}\alpha\,\text{sen.}\tfrac{1}{2}\beta$$

e sostituendo per ciascuna delle quantità trigonometriche contenute nella precedente equazione le loro corrispondenti espressioni simboliche di sopra ritrovate, sarà

$$\frac{c}{x}=\sqrt{[1-\frac{a^2}{x^2}]}\sqrt{[1-\frac{b^2}{x^2}]}-\frac{ab}{x^2}$$

Dalla quale equazione, per mezzo delle ovvie riduzioni si avrà quella al proposto Problema, che è la seguente.

$$x^3-(a^2+b^2+c^2)x+2abc=0$$

la quale equazione corrisponde a quella ottenuta per altre vie dal Newton nel Cap. I. Sect. IV. della sua Aritmetica Universale, a meno del segno dell'ultimo termine, che trovasi essere — in vece di +; sopra di che gioverà moltissimo a' giovani il consultare la Nota del Castillon a tal proposito nell'edizione ch' egli diede della suddetta Opera.

SCOLIO.

234. Le soluzioni de' due precedenti Problemi sono tratte dalla Trigonometria del Signor Cagnoli.

PROPOSIZIONE III.

PROBLEMA.

255. Inclinare da un angolo A [*fig.* 50.] del quadrato ABCD la linea retta AFE, in modo che la parte FE di essa, che resta frapposta tra i lati dell'angolo C opposto ad A, sia uguale ad una linea retta data.

Soluz. Pongasi AB$=a$, FE$=b$, e tang. DAE $= x$, sarà perciò seg. DAE $= \sqrt{(1+x^2)}$

Or 1 : tang. A $[x]$ :: AD $[a]$: DE $= ax$

e perciò CE $= ax - a$. Ma è poi

$x : \sqrt{(1+x^2)}$ :: CE $[ax-a]$: EF $[b]$.

Adunque sarà

$$bx=(a-ax)\sqrt{(1+x^2)}$$

e quadrando ambi i membri si avrà

$$b^2x^2=a^2-2a^2x+2a^2x^2-2a^2x^3+a^2x^4.$$

Or se suppongansi le linee rette trigonometriche sopraindicate prese per un raggio espresso da a, l'equazione proposta dovrà di-

ventare uniforme ne' suoi termini coll' introdurvisi l' a per moltiplicatore o divisore convenevolmente; ed essa prenderà perciò la seguente altra forma

$$b^4 x^2 = a^4 - 2a^3 x + 2a^2 x^2 - 2ax^3 + x^4$$

nella quale la x non rappresenta più la tangente trigonometrica delle Tavole; ma bensì la linea retta DE, subitochè il raggio trigonometrico si è cambiato in questo caso nella quantità a, che rappresenta la AB.

SCOLIO.

236. L'equazione quassù ottenuta è identica a quella, alla quale per altre vie pervenne l'Hospital (*); ed essa si abbasserà al secondo grado, aggiungendo $a^2 x^2$ ad ambo i membri, e poi estraendo da ciascun di essi la radice quadrata, per mezzo della quale operazione si avrà

$$x^2 - ax + a^2 = + x \sqrt{(a^2 + b^2)} = cx$$

ponendo $a^2 + b^2 = c^2$. Sicchè quell' equazione sarà il prodotto delle seguenti altre due

$$x^2 - (a+c)\, x + a^2 = 0$$
$$x^2 - (a-c)\, x + a^2 = 0$$

Ed avrà quindi luogo l'istessa composizione geometrica del Problema che diede l'Hospital nel luogo citato.

(*) Sections Coniques Lib. x.

PROPOSIZIONE IV.

PROBLEMA.

237. Dividere in tre parti uguali un dato angolo rettilineo, o l'arco che lo sottende.

Soluz. Essendo $\text{sen}.3\varphi = 2.\text{sen}.2\varphi \cos.\varphi - \text{sen}.\varphi$

$$= 4.\cos.^2 \varphi \text{ sen } \varphi - \text{sen}.\varphi$$

$$= 4.\text{sen } \varphi \,(1 - \text{sen}.^2\varphi) - \text{sen}.\varphi$$

eseguendo la multiplicazione, ed ordinando per rapporto a $\text{sen}.\varphi$, sarà

$$4.\text{sen}^3.\,\varphi - 3.\text{sen } \varphi + \text{sen}.3\varphi = 0$$

Or si dinoti per q la corda dell'arco 3φ, e per z quella dell'arco φ, le quali corde sono i doppj de' seni rispettivi di essi archi; la precedente equazione si trasformerà nell'altra tra esse corde.

$$z^3 - 3z + q = 0$$

ch'è quella stessa che per mezzo di considerazioni di triangoli simili aveva ottenuta il Cartesio nel Libro III. della sua Geometria. Ed essa geometricamente costruita darebbe la composizione del proposto Problema.

SCOLIO.

238. E qui non parmi fuor di proposito, ritornando al Teor. sulle corde dimostrato nel Lib I [*prop.*VI.], di far vedere, come senza nè meno ricorrere alle riduzioni fatte nella formola del seno dell'arco triplo, si possa agevolmente ottenere l'equazione al proposto Problema, o anche a quello universale di: *Dividere un arco dato in qualunque numero di parti uguali.*

In fatti ponendo la prima corda $AB = z$ [*fig.* 47.], e la sua supplementale BH, che dovrebbe essere espressa da

$\sqrt{(4-z^2)}$, dinotandola per brevità con y, si avrà per le corde AB, AC, AD, AE, AF, AG, *ec.* che chiamerò I, II, III, IV, V, VI. ec. la seguente

TAVOLA

I.	corda	$= z$
II.		$= zy$
III.		$= z\,(y^2-1)$
IV.		$= z\,(y^3-2y)$
V.		$= z\,(y^4-3y^2+1)$
VI.		$= z\,(y^5-4y^3+3y)$
VII.		$= z\,(y^6-5y^4+6y^2-1)$
VIII.		$= z.(y^7-6y^5+10y^3-4y)$
ec.		

E ponendo nell'espressione della terza corda che chiamerò q, $\sqrt{(4-z^2)}$ invece di y, si otterrà di nuovo l'equazione al precedente Problema, e così per le altre.

239. La legge onde progrediscono le espressioni di sopra recate, ordinate rispetto alla y, è la seguente.

1.° I termini della formola di ciascuna di tali corde alternano pe' loro segni.

2.° Gli esponenti della y van decrescendo del numero 2.

3.° I coefficienti de' secondi termini delle suddette espressioni formano la progressione de' numeri naturali 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ec. I coefficienti de' terzi termini sono i numeri triangolari di quest'altra serie 0, 0, 0, 0, 1, 3, 6, 10, ec. Quelle de' quarti termini sono i numeri piramidali della serie 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 4, ec. e così in seguito. E potrà pure la forma di ogni termine di ciascuna serie rilevarsi dal termine generale di cui essa è suscettiva, essendo riducibile a differenze costanti. E finalmente la formola generale della corda di un arco che sia il multiplice n di un altro, dalla quale dipende la divisione di un arco dato in un numero n di parti, sarà la seguente

$$z\left[y^{n-1}-\frac{n-2}{1}y^{n-3}+\frac{(n-3)(n-4)}{1.2.}y^{n-5}\right.$$
$$\left.-\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3.}y^{n-7}+\text{ec.}\right]$$

E volendo inscrivere nel cerchio del raggio 1 un qualsivoglia poligono regolare, cioè volendo dividere la sua circonferenza 2π nel numero n di parti uguali, basterà porre la precedente espressione generale uguale a zero; tal divenendo essa in questo caso, poichè dinota la corda di una circonferenza di cerchio; e colla solita sostituzione di $\sqrt{(4-z^2)}$ per y si avrà l' equazione dalla quale dipende la determinazione della corda dell'arco $\frac{2\pi}{n}$

Ma chi desidera maggior estensione al presente argomento, legga la dotta Memoria del Signor Fergola inserita nel Vol. I. degli Atti della nostra Reale Accademia delle Scienze di recente pubblicato, dalla quale abbiamo noi tratte le considerazioni recate in questo Scolio.

NOTE

AL LIBRO I.

Alle Prop. VII. VIII.

Crediamo di far cosa utile a' giovani recando qui l' ordinaria maniera adoperata da' Trigonometri in dimostrare questi due Teoremi.

Sieno BE, ER [*fig.*51.] gli archi proposti, i cui seni sieno EH, RD, e CH, CD i coseni: sia poi RN il seno della loro somma, cioè dell' arco REB, PQ il seno della differenza di essi, cioè dell'arco PB.

Si compia la figura come si vede. Ed essendo simili i triangoli CEH, CDG, sta CE : EH :: CD : DG, cioè chiamando φ e θ gli archi BE, ER, e dinotando per 1 il raggio CE,

$$1 : \text{sen. } \varphi :: \text{cos. } \theta : DG = \text{sen. } \varphi \cos \theta$$

Similmente per gli altri triangoli simili RDF, CEH sta CE : CH :: RD : BF, cioè 1 : cos. φ :: sen. φ : RF. E sarà quindi RF = sen. θ cos. φ. Laonde la RN, cioè sen. $(\varphi+\theta)$, essendo = NF + FR, ossia a GD + FR, si avrà perciò

$$\text{sen. } (\varphi+\theta) = \text{sen. } \varphi \cos. \theta + \text{sen. } \theta \cos. \varphi$$

Inoltre per essere RD=DP, è anche RF=FS; che perciò PQ=DG — RF, darà

$$\text{sen. } (\varphi-\theta) = \text{sen. } \varphi \cos. \theta - \text{sen. } \theta \cos. \varphi.$$

Ritornando nuovamente agli stessi triangoli simili considerati di sopra, si vedrà che pe' triangoli simili ECH, DCG debba essere CE : CH :: CD : CG, cioè

$$1 : \cos. \varphi :: \cos. \theta : CG = \cos. \varphi \cos. \theta$$

e che per gli altri triangoli simili CEH, RDF si abbia CE : HE :: RD : DF, cioè

$$1 : \text{sen } \varphi :: \text{sen. } \theta : DF = \text{sen. } \varphi \text{ sen. } \theta.$$

Laonde CN, ch' è uguale a CG+GN=CG−DF, sarà quanto cos. φ cos. θ — sen. φ sen. θ; e CQ, ch' è quanto CG + GQ, cioè CG + GN, per essere GQ=GN, siccome è PD=DR, sarà uguale a cos. φ cos. θ + sen. φ sen. θ. Ma CN è lo stesso che cos. $(\varphi+\theta)$, e CQ è quanto cos. $(\varphi-\theta)$; quindi sarà

$$\cos.(\varphi+\theta) = \cos.\varphi \cos.\theta - \text{sen.}\varphi \text{ sen.}\theta$$
$$\cos.(\varphi-\theta) = \cos.\varphi \cos.\theta + \text{sen.}\varphi \text{ sen.}\theta$$

E questa dimostrazione, col variar semplicemente la figura, si vedrà appartenere a due archi qualunque, purchè però si tenga conto de' segni de' seni e coseni degli archi dati.

Al Cor. della Prop. IX.

L'espressione di tang. 3φ si otterrà nel seguente modo.

$$\text{tang. } 3\varphi = \frac{\text{tang.}\varphi + \text{tang. } 2\varphi}{1-\text{tang.}\varphi\,\text{tang.}2\varphi} = \frac{3\,\text{tang. }\varphi - \text{tang.}^3\varphi}{1-3.\text{tang.}^2\varphi}$$

E similmente si otterrebbero le espressioni per tang. 4φ, 5φ ec.

AL LIBRO II.

Alla Prop. IV.

L' enunciazione, e la dimostrazione di questa Proposizione conveniva che fossero generalmente fatte, e non già in quel modo che trovasi ordinariamente praticato nelle istituzioni di Trigonometria.

Alla Prop. X. ed al suo Scolio.

I due risultamenti ottenuti ne' due sopra notati luoghi, possono servir di esempio per ciò ch' è stato detto nell' Introduzione al Lib VI. intorno all' uso, che può farsi delle formole trigonometriche per la soluzione di taluni problemi geometrici.

AL LIBRO III.

Alla Prop. III.

Ciò che si dimostra in questa Proposizione, o suole assumersi senza prova, o pur dimostrarsi con ragionamenti analitici approssimanti, e che ci avrebbero di più obbligato alla ricerca della serie che rappresenta l'arco nel seno; il che da noi si voleva evitare. Abbiamo perciò tenuta un'altra strada, che ci è anche sembrata più geometrica e rigorosa.

Alla Prop. IV.

Questa Proposizione si dimostra ordinariamente o col supporre che gli elementi delle tangenti AL, AM [*fig.* 24.] prossimi ad A si confondano cogli elementi degli archi corrispondenti, che comprendono l'angolo sferico, e quindi che quest' angolo sferico sia quanto quell' angolo rettilineo, e perciò anche quanto l'altro in cui inclinansi i piani de' cerchi ADB, AEB; o pure è fondata sulla considerazione, che movendosi la semicirconferenza AEB intorno all'asse AB per descrivere la superficie sferica, il raggio OE perpendicolare ad AB descrive col suo estremo E l'arco ED, nel tempo stesso che l'arco EA, passando da questo sito nell'altro DA, costituisce così l'angolo sferico EAD, la qual maniera di dimostrare da noi qui indicata può vedersi a disteso nella Trigonometria Sferica del Signor Delambre. La nostra dimostrazione però ci sembra procedere più geometricamente, e mettere anche, come quella della Prop. precedente, più uniformità tra il metodo di dimostrare in questi Elementi di Trigonometria, e quello tenuto negli Elementi di Geometria Elementare.

A quelle Prop. del Cap. II. che riguardano la natura dei triangoli sferici.

Le considerazioni dintorno alla natura de' triangoli sferici a noi pare che debbano premettersi a' principj della risoluzione de' medesimi; poichè così richiede l'ordine geometrico: ecco perchè non siamo d'accordo con qualche moderno Analista.

Alle Prop. X. XI. e XII.

Se i triangoli sferici si potessero sempre far coincidere, come avviene ne' rettilinei, quando o hanno i lati l'un l'altro uguali, o due lati e l'angolo compreso sono rispettivamente uguali, ec., starebbero bene le dimostrazioni, che per queste Proposizioni si danno ordinariamente, e che lo stesso Signor Cagnoli ha anche adottate nella sua Trigonometria. Ma la cosa non va così, come si può rilevare da' secondi casi delle nostre dimostrazioni, le quali sono state fondate sulla corrispondenza di un triangolo sferico con un angolo solido triedro.

AL LIBRO IV.

Alla Prop. II.

È piaciuto a taluni, tal che al Delambre, di adottare per la verità enunciata in questa Proposizione la seguente dimostrazione.

Sia il triangolo sferico BZA, e C il centro della sfera cui si appartiene. Nel punto Z sien tirate le tangenti ZP, ZQ agli archi ZB, ZA, e fino a' raggi CB, CA prodotti. Finalmente si congiunga la PQ. Il triangolo PCQ darà

$$PQ^2 = ZP^2 + ZQ^2 - 2ZP.ZQ \cos.Z$$

$=\text{tang.}^2ZA+\text{tang.}^2ZB-2.\text{tang.}ZA\ \text{tang.}ZB\ \cos.Z$

Il triangolo PQC darà similmente

$PQ^2=PC^2+CQ^2-2CP.CQ\cos.PCQ$

$=\sec.^2ZA+\sec.^2ZB-2.\sec.ZA\ \sec.ZB\ \cos.AB$

poichè AB è la misura dell' angolo PCQ. Sottraggasi la prima di queste equazioni dalla seconda; e si avrà

$0=\ldots\sec^2.ZA-\text{tang.}^2ZA+\sec^2.ZB-\text{tang.}^2ZB-$
$\sec.ZA\sec.ZB\cos.AB+2.\text{tang.}ZA\text{tang.}ZB\cos.Z$

$0=1+1-2.\sec.ZA\sec.ZB\cos.AB+2.\text{tang.}ZA\text{tang.}ZB\cos.Z$

$0=1-\sec.ZA\ \sec.ZB\ \cos.AB+\text{tang.}ZA\ \text{tang.}ZB\ \cos.Z$

cioè $\sec.ZA\ \sec.ZB\ \cos.AB=\text{tang.}ZA\ \text{tang.}ZB\ \cos.Z+1$

e dividendo tutto per $\sec.ZA\ \sec.ZB=\dfrac{1}{\cos ZA\ \text{co.}ZB}$,

ne risulterà

$\cos.AB=\text{sen.}ZA\ \text{sen.}ZB\ \cos Z+\cos ZA\ \cos.ZB$

o sia, esprimendo i lati del triangolo sferico per a, b, c, e gli angoli ad essi opposti per A, B, C; sarà, per un lato a

$\cos.a=\text{sen.}b\,\text{sen.}c\ \cos.A+\cos.b\ \cos.c$

ch' è la stessa formola del nostro Teorema.

Ma la dimostrazione qui recata non ci sembra nè più semplice pel numero de' passaggi, e pe' principj di riduzione de'quali abbisogna, ne' più naturale di quella da noi recata.

Allo Scol. Gen. dopo la Prop. XVI.

Relativamente alla regola del Signor de Gua riportata in fine di questo Scolio conviene far avvertire, che la maniera da noi tenuta in esibire la quarta parte di un triangolo sferico, ci ha evitato di star a considerare, come fa il Cagnoli, i casi in cui la somma de' tre angoli non ecceda i 270°, o pur sia tra 270° e 360°, o finalmente oltrepassi questo limite.

Digitized by Google

INDICE

Avvertimento. *Pag.* v
Saggio di Storia Trigonometrica. vii
LIBRO I. Delle quantita' Circolari, e del loro calcolo. 1
CAP. I. *Della divisione della circonferenza, e della misura degli angoli.* 1
CAP. II. *Della natura delle quantità circolari, e del loro rapporto.* 6
CAP. III. *De' segni che appartengono alle linee trigonometriche ne' quattro diversi quadranti del cerchio; e de' valori che esse hanno negli estremi di questi.* 9
CAP. IV. *Del Canone Trigonometrico, e della maniera di costruirlo servendosi di principj ricavati dalla Geometria Elementare.* 15
CAP. V. *Formole circolari, che deduconsi dalle Prop. VII, VIII, e da' loro Corollarj.* 31
LIBRO II. Principj di Trigonometria Rettilinea. 35
Introduzione. 35
CAP. I. *Principj per la risoluzione de' triangoli.* 37
CAP. II. *Applicazione de' principj stabiliti nel precedente Capitolo all'effettiva risoluzione de' triangoli.* 44
CAP. III. *Della maniera di determinare i segmenti della base, e la perpendicolare, ne' diversi casi di risolvimento proposti nel precedente Capitolo pe' triangoli obbliquangoli; e di alcune altre ricerche analoghe.* 50
CAP. IV. *Di alcuni altri casi in cui le tre parti date per la risoluzione di un triangolo sono diversamente combinate.* 56

LIBRO III. De' Triangoli Sferici. 65
CAP. I. *Definizioni, e Nozioni preliminari.* 65
CAP. II. *Della Natura, e delle Proprietà de' Triangoli Sferici.* 72
LIBRO IV. Principj di Trigonometria Sferica. 81
CAP. I. *Principj generali per la risoluzione de' triangoli sferici.* 81
CAP. II. *Riduzione delle formole precedenti, nel caso, che il triangolo sferico abbia un angolo retto.* 89
CAP. III. *Applicazione de' principj stabiliti ne' due precedenti Capitoli all' effettiva risoluzione de' triangoli sferici.* 93
CAP. IV. *Di alcuni triangoli sferici la cui risoluzione dipende da quella de' triangoli sferici rettangoli.* 101
CAP. V. *Ricerche geometriche intorno a' casi dubbj nella risoluzione de' triangoli sferici.* 104
CAP. VI. *Regole Neperiane, e loro uso vantaggioso nella risoluzione de' triangoli sferici.* 109
CAP. VII. *Della valutazione della perpendicolare e de' segmenti della base de' triangoli sferici.* 121
CAP. VIII. *Della misura della superficie e del perimetro di un triangolo sferico.* 127
LIBRO V. Uso delle Formole Trigonometriche nella soluzione di taluni Problemi Geometrici. 133
LIBRO VI. Dell' uso che può farsi delle formole Trigonometriche nella soluzione algebrica di taluni problemi, che debbono poi esser geometricamente costruiti. 141
NOTE. 149

616027
Biblioteca Nazionale V. E. III. NAPOLI

Fig. 3.

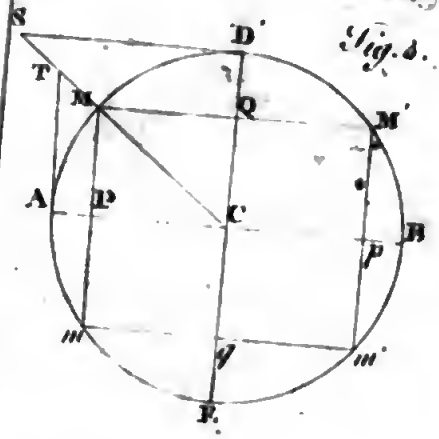
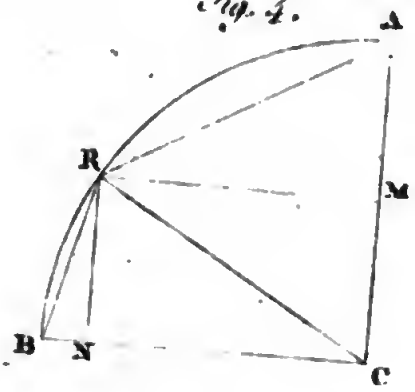


Fig. 4.



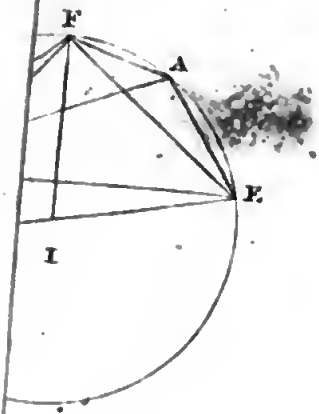


Fig. 7.

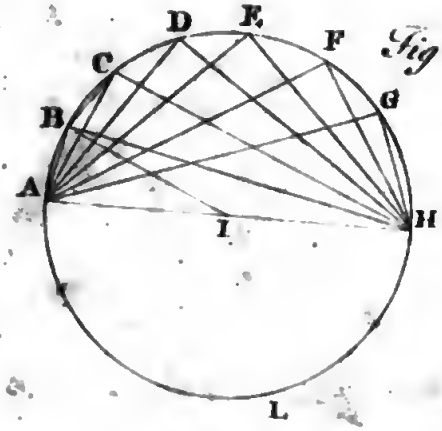
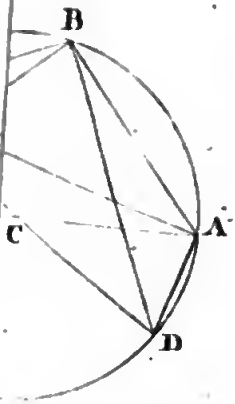
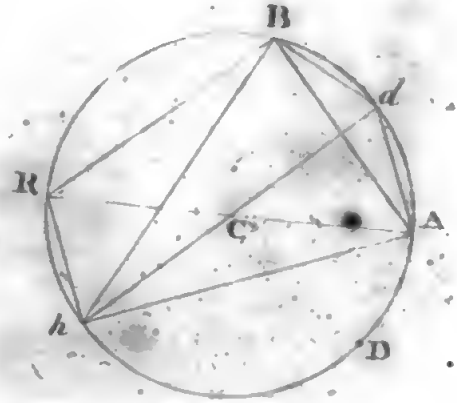


Fig. 9





Digitized by Google

Fig. 11.

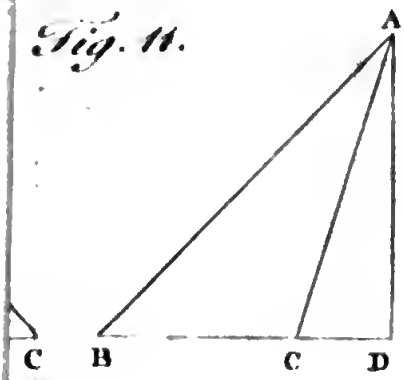


Fig. 12.

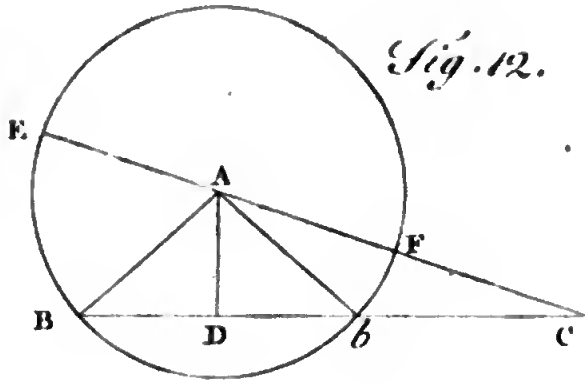


Fig. 15

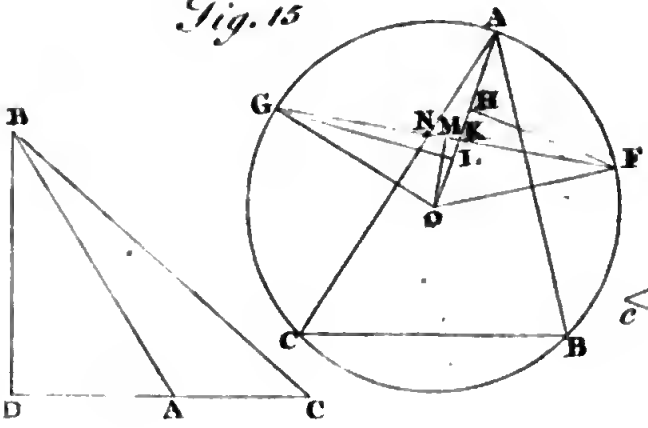


Fig. 16.

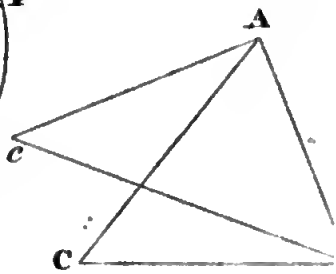


Fig. 19.

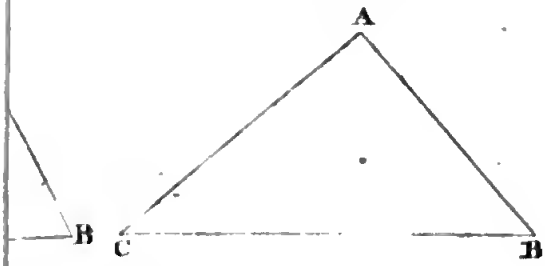
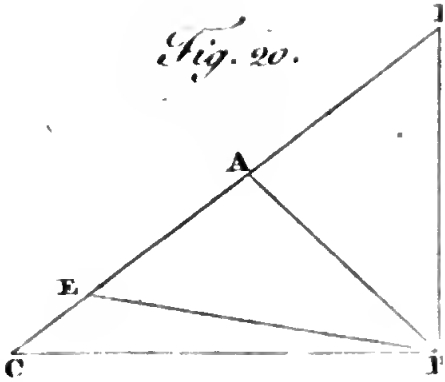


Fig. 20.



Digitized by Google

Fig. 23.

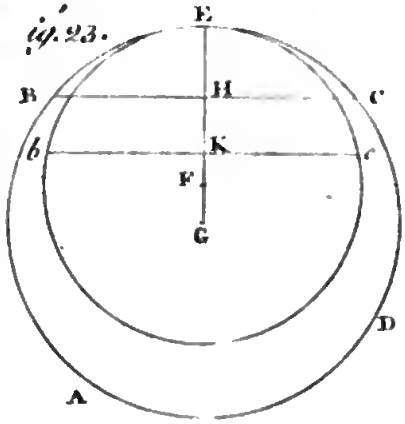


Fig. 24.

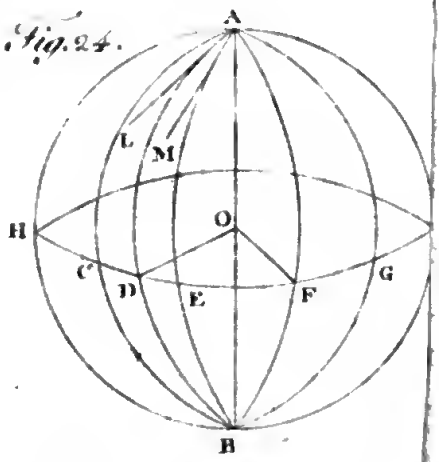


Fig. 27.

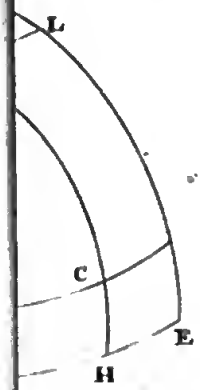
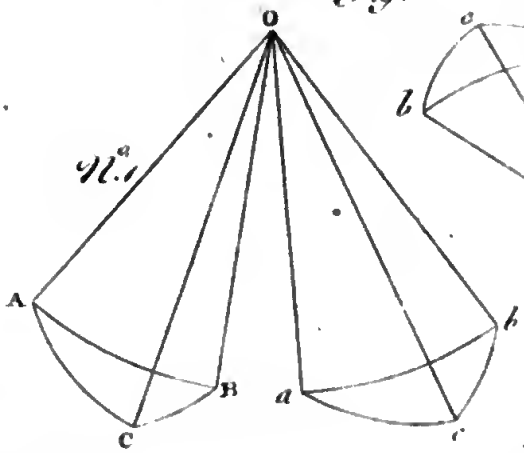


Fig. 28.



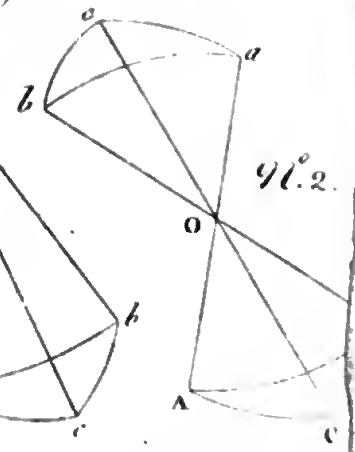


Fig. 31.

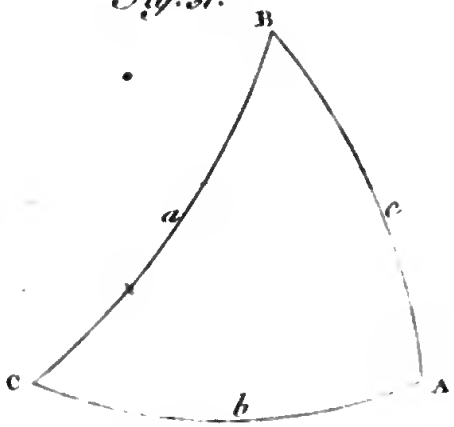


Fig. 32.

Digitized by Google

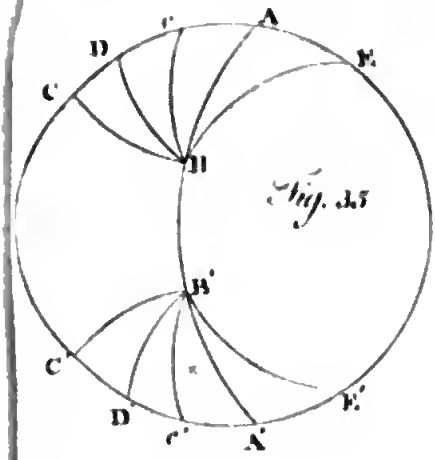


Fig. 35

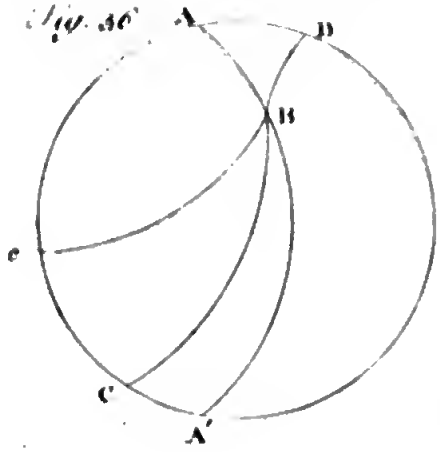
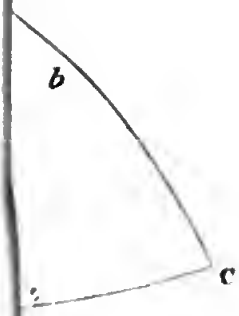
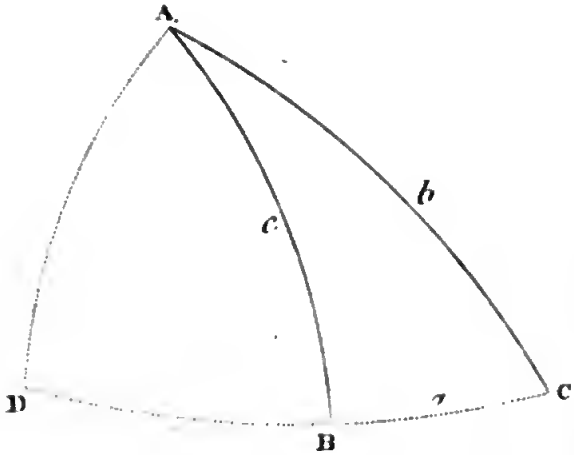


Fig. 36

Fig. 38.





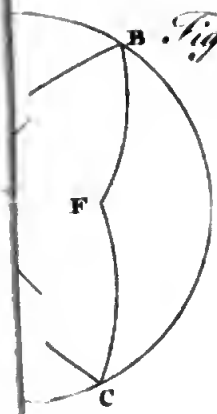


Fig. 40.

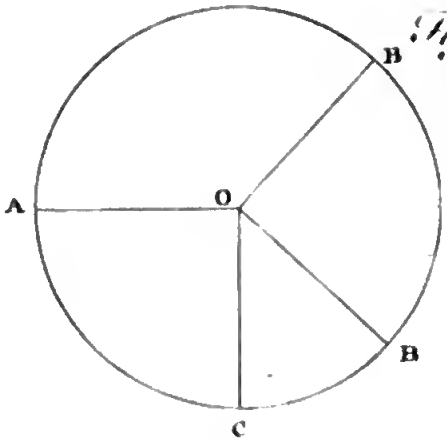


Fig. 41.

Digitized by Google

Fig. 43

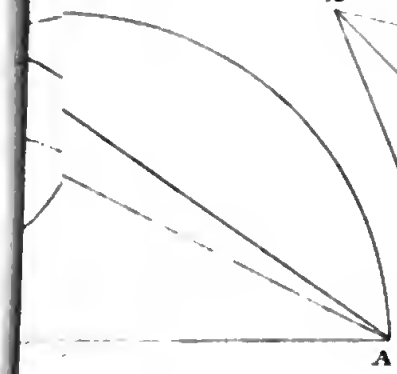


Fig. 44.

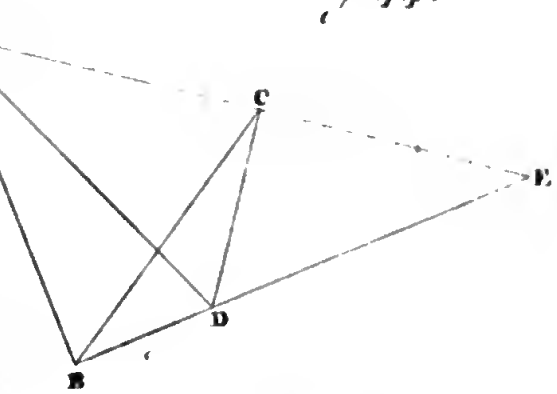


Fig. 47.

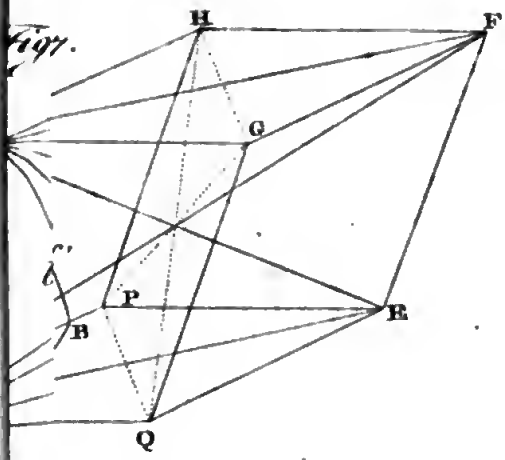


Fig. 48.

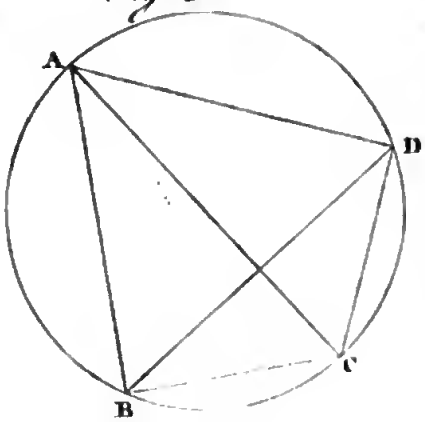


Fig. 51.

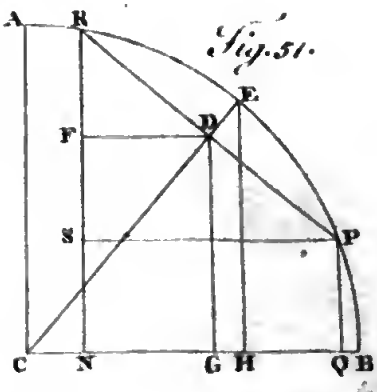
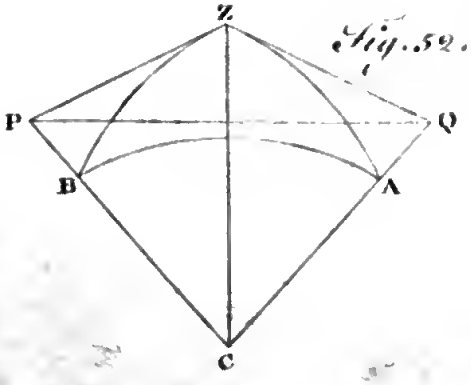


Fig. 52.



Digitized by Google